ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

1976-1989

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΕΤΑΙΡΕΙΑ
1985

(Αντί Προλόγου)

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία έκρινε καλό, από το 1986, να συγκεντρώσει τα θέματα των Μαθηματικών στις Εισαγωγικές Εξετάσεις στα Ανώτατα Εκπαιδευτικά Ιδρύματα και να τα παρουσιάσει (μαζί βέβαια με τις λύσεις τους) σε μια ολοκληρωμένη έκδοση.

Στη συνέχεια με την προσθήκη των θεμάτων της Χρονιάς 1986 κυκλοφόρησε η δεύτερη έκδοση το 1987.

Το 1989 κυκλοφόρησε η τρίτη έκδοση με την προσθήκη των θεμάτων των χρόνων 1987 και 1988. Μετά την εξάντληση και της τρίτης έκδοσης προχωρήσαμε στην τέταρτη έκδοση στην οποία συμπεριλαμβάνονται και τα θέματα του τελευταίου χρόνου 1989.

Στόχος της έκδοσης αυτής είναι να πληροφορήσει τους μαθητές για το επίπεδο και τη «φιλοσοφία» των θεμάτων που ζητούνται στις εισαγωγικές. Αυτό πιστεύουμε ότι γίνεται όχι μόνο με την παράθεση των «εκφωνήσεων» αλλά και με τις λύσεις που δίνονται για κάθε θέμα. (Να σημειωθεί ότι έχουν παραληφθεί τα θέματα Γεωμετρίας - Τριγωνομετρίας, επειδή τα τελευταία χρόνια δεν συμπεριλαμβάνονται στις Εισαγωγικές Εξετάσεις).

Αυτή η έκδοση αποτελεί μια προσφορά της ΕΜΕ προς την Νεολαία μας και πιστεύουμε, ότι δίνοντας αυτό το «στίγμα» των Μαθηματικών στις Εισαγωγικές Εξετάσεις οι Μαθητές θα βοηθηθούν στην προετοιμασία τους.

Το Διοικητικό Συμβούλιο της ΕΜΕ ευχαριστεί το μέλος του Βαγγέλη Ντζιαχρήστο που επιμελήθηκε τις τέσσερις εκδόσεις και τον συνάδελφο Κώστα Μπρουχούτα που συνεργάσθηκε στην επεξεργασία των θεμάτων.

Το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε.

Αθήνα 1990

Περιεχόμενα

1976

πολυτεχνικός — φυσικομαθηματικός γεωπονοδασολογικός κύκλος

ζήτημα πρώτο

α) Δώσατε τον ορισμό της μηδενικής ακολουθίας, της συγκλίνουσας και της φραγμένης ακολουθίας πραγματικών αριθμών.

β) Δείξατε ότι οι μηδενικές και οι συγκλίνουσες ακολουθίες είναι φραγμένες.

απάντηση

α) Θεωρία
β) Θεωρία

ζήτημα δεύτερο

Δίνεται η εξίσωση:

$$(\alpha+1)\,x^3-(\alpha^2+5\alpha-5)\,x^2+(\alpha^2+5\alpha-5)\,x-(\alpha+1)=0,$$
$$\alpha\in\mathbb{R}-\{-1\}$$

α) Δείξτε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου α, η εξίσωση έχει ρίζες που αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

β) Αν παραστήσουμε με x_2 τη ρίζα της εξίσωσης που δεν εξαρτάται από την παράμετρο α, προσδιορίστε τότε το α ώστε οι ρίζες x_1, x_2, x_3 να αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

γ) Δείξτε ότι για τις τιμές της παραμέτρου α που βρήκατε στην προηγούμενη ερώτηση η εξίσωση έχει τρεις ίσες ρίζες.

απάντηση

α) E: $(\alpha+1)x^3-(\alpha^2+5\alpha-5)x^2+(\alpha^2+5\alpha-5)x-(\alpha+1)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\alpha+1)(x^3-1)-(\alpha^2+5\alpha-5)x\,(x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+1)(x-1)(x^2+x+1)-(\alpha^2+5\alpha-5)x\,(x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[(\alpha+1)x^2-(\alpha^2+4\alpha-6)x+(\alpha+1)]=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$\text{ή} \quad (\alpha+1)x^2-(\alpha^2+4\alpha-6)x+\alpha+1=0.$$

Άρα ρίζες της αρχικής είναι οι x_1, x_2, x_3 όπου $x_2=1$ και x_1, x_3 ρίζες της

$$(\alpha+1)x^2-(\alpha^2+4\alpha-6)x+\alpha+1=0$$

Είναι $\qquad x_2=1 \wedge x_1x_3=\dfrac{\alpha+1}{\alpha+1}=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1x_3=1=x_2^2 \Rightarrow x_1,\ x_2,\ x_3$$

διαδοχικοί όροι γεωμ. προόδου ανεξάρτητα από την εκλογή του α.

β) x_1, $x_2=1$, x_3 διαδοχικοί όροι Αρ. πρόοδου

$$\Leftrightarrow x_1+x_3=2x_2 \Leftrightarrow x_1+x_3=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^2+4\alpha-6}{\alpha+1}=2 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha-8=0 \Leftrightarrow \alpha=2 \text{ ή } \alpha=-4$$

γ) i) $\alpha=2$ η (E) γίνεται:

$$3x^2-9x^2+9x-3=0 \Leftrightarrow (x-1)^3=0 \Leftrightarrow x_1=x_2=x_3=1$$

ii) $\alpha=-4$ η (E) γίνεται:

$$-3x^3+9x^2-9x+3=0 \Leftrightarrow -3(x-1)^3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1=x_2=x_3=1$$

ζήτημα τρίτο

α) Πολυώνυμο $\Pi(x)$ έχει την ιδιότητα: $\Pi(x) = \Pi(1-x)$ (1)
Δείξτε ότι το πολυώνυμο $\Pi(x) - \Pi(0)$ διαιρείται από το πολυώνυμο $x \cdot (x-1)$.

β) Πολυώνυμο $P(x)$ έχει την ιδιότητα $P(x) = P(x-1)$. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ είναι σταθερό πολυώνυμο.

απάντηση

α) Το πολυώνυμο $\Pi(x) = \Pi(1-x)$ (1)

γιά $x = 0$ γίνεται: $\Pi(0) = \Pi(1)$ (2)

Θέτοντας $F(x) = \Pi(x) - \Pi(0)$ έχουμε:

$$F(0) = \Pi(0) - \Pi(0) = 0$$

και άρα το πολυώνυμο $F(x)$ διαιρείται με τον x. Ακόμη επειδή $F(1) = \Pi(1) - \Pi(0)$ και λόγω της (2) $F(1) = \Pi(0) - \Pi(0) = 0$, το $F(x)$ διαιρείται με το $x - 1$.

Άρα το $F(x)$ διαιρείται από το πολυώνυμο $x \cdot (x-1)$.

β) Έστω:

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}x^{\nu-2} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

τότε για $x = 0$, έχουμε $P(0) = \alpha_0$.

Από τη σχέση:

$P(x) = P(x-1)$ για $x = 1, 2, \dots \nu, \nu+1$ έχουμε:

$P(1) = P(0)$, $P(2) = P(1)$, ... $P(\nu) = P(\nu-1)$,

$P(\nu+1) = P(\nu)$.

και άρα $P(0) = P(1) = P(2) = \dots = P(\nu) = P(\nu+1)$.

Επομένως το πολυώνυμο $F(x) = P(x) - P(0)$ μηδενίζεται για $x = 1, 2, \dots \nu, \nu+1$ δηλαδή για τιμές του x περισσότερες από τον υποτιθέμενο βαθμό του και άρα θα είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Δηλαδή: $P(x) - P(0) = 0 \Leftrightarrow P(x) = P(0) = \alpha_0$.

Άρα $P(x)$ σταθερό πολυώνυμο.

Ζήτημα τέταρτο

α) Αν $\kappa \in Z_+^*$ (θετικός ακέραιος), δείξτε ότι ο αριθμός $\kappa^2 + 4\kappa$ βρίσκεται μεταξύ των τετραγώνων δύο διαδοχικών θετικών ακεραίων αριθμών.

β) Εάν α, β, γ και $\delta \in Z_+^*$ (θετικοί ακέραιοι), δείξτε ότι το γινόμενο:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta}\right) \cdot \left(\frac{\delta}{\gamma} - \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

δεν μπορεί να είναι θετικός ακέραιος

απάντηση

α) Είναι:

$$\kappa^2 + 4\kappa < \kappa^2 + 4\kappa + 4 \Leftrightarrow \kappa^2 + 4\kappa < (\kappa + 2)^2$$

και επειδή

$$\kappa \geqslant 1 \Rightarrow 2\kappa > 1 \Leftrightarrow \kappa^2 + 2\kappa + 2\kappa > \kappa^2 + 2\kappa + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \kappa^2 + 4\kappa > (\kappa + 1)^2$$

και άρα $\qquad (\kappa + 1)^2 < \kappa^2 + 4\kappa < (\kappa + 2)^2.$

Επομένως ο $\kappa^2 + 4\kappa$ περιέχεται μεταξύ των τετραγώνων των διαδοχικών ακέραιων. $\kappa + 1$ και $\kappa + 2$.

β) Έστω

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta}\right)\left(\frac{\delta}{\gamma} - \frac{\beta}{\alpha}\right) = \rho \in Z_+^* \xLeftrightarrow{\frac{\alpha}{\beta}=\kappa,\ \frac{\gamma}{\delta}=\lambda} (\kappa - \lambda)\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\kappa}\right) = \rho \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\kappa - \lambda)^2 = \rho\kappa\lambda \Leftrightarrow \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^2 - (\rho + 2)\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right) + 1 = 0 \quad (1)$$

Η (1) έχει ρητούς συντελεστές και θέλουμε νάχει ρίζα τον ρητό αριθμό $\frac{\kappa}{\lambda}$. Άρα θα πρέπει

$\Delta = (\rho + 2)^2 - 4 = \rho^2 + 4\rho =$ τέλειο τετράγωνο ακεραίου αριθμού

Άτοπο από το (α). Άρα

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta}\right)\left(\frac{\delta}{\gamma} - \frac{\beta}{\alpha}\right) \notin Z_+^*.$$

1976

οικονομικός κύκλος

ζήτημα πρώτο

Να αποδείξετε τους τύπους που δίνουν τον ν-οστό όρο και το άθροισμα των ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου

απάντηση

Θεωρία

ζήτημα δεύτερο

Να λυθεί το σύστημα:

$$x \cdot y = \alpha^2 \qquad (1)$$

$$(\log x)^2 + (\log y)^2 = \frac{5}{2}(\log\alpha)^2, \qquad \alpha \in Z_+^* \qquad (2)$$

απάντηση

Για να έχουν νόημα οι logx και logy πρέπει $x > 0$ και $y > 0$.
Από την (1) έχουμε:

$$\log(x \cdot y) = \log(\alpha^2) \Leftrightarrow \log x + \log y = 2\log\alpha \qquad (3)$$

Από την (2) έχουμε:

$$(\log x)^2 + (\log y)^2 = \frac{5}{2}(\log\alpha)^2 \Leftrightarrow (\log x + \log y)^2 - 2\log x \log y =$$

$$= \frac{5}{2}\,(\log\alpha)^2 \overset{(3)}{\Longleftrightarrow} 4\log^2\alpha - 2\log x\log y = \frac{5}{2}\log^2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log x\log y = \frac{3}{4}\log^2\alpha \qquad (4)$$

Από τις (3) και (4) έχουμε ότι οι logx και logy είναι ρίζες της εξίσωσης:

$$\omega^2 - 2\log\alpha\cdot\omega + \frac{3}{4}\log^2\alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\omega^2 - 8\log\alpha\cdot\omega + 3\log^2\alpha = 0 \qquad (5)$$

Λύνοντας την εξίσωση (5) έχουμε:

$$\omega = \frac{4\log\alpha \pm 2\log\alpha}{4} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{3}{2}\log\alpha = \log(\alpha\sqrt{\alpha}) \\ \omega_2 = \dfrac{1}{2}\log\alpha = \log(\sqrt{\alpha}) \end{cases}$$

Επομένως $(\log x = \log(\alpha\sqrt{\alpha})$ και $\log y = \log(\sqrt{\alpha}))$ (6)

ή $(\log x = \log\sqrt{\alpha}$ και $\log y = \log(\alpha\sqrt{\alpha}))$ (7)

Από τις (6) έχουμε τη λύση $(x, y) = (\alpha\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha})$

Από τις (7) έχουμε τη λύση $(x, y) = (\sqrt{\alpha}, \alpha\sqrt{\alpha})$.

1977

πολυτεχνικός — φυσικομαθηματικός γεωπονοδασολογικός κύκλος

ζήτημα πρώτο

α) Να δείξετε ότι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση μπορεί να έχει το πολύ ένα σημείο μηδενισμού στο πεδίο ορισμού της.

β) Με τη βοήθεια των παραγώγων να δείξετε ότι η συνάρτηση $\phi(x) = \alpha^x$, όπου $0 < \alpha < 1$, είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

γ) Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $3^x + 4^x = 5^x$ έχει τη λύση $x = 2$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή δεν έχει άλλη λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

απάντηση

α) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση τότε:

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad \text{με} \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Έστω τώρα ότι η f μηδενίζεται για δύο σημεία $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ και έστω $x_1 < x_2$. Τότε από τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης θα έχουμε:

$$0 = f(x_1) > f(x_2) = 0 \Rightarrow 0 > 0 \qquad \text{άτοπο}$$

Άρα η f μηδενίζεται σε ένα το πολύ σημείο του πεδίου ορισμού της.

β) Είναι:

$$f'(x) = (\alpha^x)' = \alpha^x \log\alpha < 0, \ \forall \alpha \in (0,1) \text{ και } \forall x \in \mathbb{R},$$

γιατί $\log\alpha < 0$ επειδή $0 < \alpha < 1$.

'Αρα η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα $\forall x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in (0,1)$

γ) Η $3^x + 4^x = 5^x$ γράφεται:

$$3^x + 4^x = 5^x \Leftrightarrow \frac{3^x}{5^x} + \frac{4^x}{5^x} = \frac{5^x}{5^x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 = 0$$

Θέτουμε $\quad f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 \Rightarrow f'(x) =$

$$= \left(\frac{3}{5}\right)^x \log\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)^x \log\left(\frac{4}{5}\right) < 0$$

σύμφωνα με το (β).

Επομένως η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της $A = \mathbb{R}$ και επειδή μηδενίζεται για $x = 2$ δεν μηδενίζεται για άλλη τιμή του πεδίου ορισμού της, σύμφωνα με το (α). 'Αρα η $3^x + 4^x = 5^x$ έχει μοναδική λύση την $x = 2$.

ζήτημα δεύτερο

α) Να μελετήσετε τα ακρότατα της συνάρτησης:

$$\phi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \qquad \alpha \neq 0$$

β) Θεωρούμε το πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, όπου $\alpha > 0$ και $\beta^2 - 4\alpha\gamma \leqslant 0$. Να δείξετε ότι για οποιουσδήποτε διάφορους μεταξύ τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ με $\kappa \cdot \lambda \leqslant 0$ ισχύει η σχέση:

$$\left|\frac{P(\kappa) - P(\lambda)}{\kappa - \lambda}\right| \geqslant \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}.$$

απάντηση

α) Η συνάρτηση $\phi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$. Θέτοντας $\phi(x) = y$ έχουμε:

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow \alpha x^2 + \beta x + \gamma - y = 0 \qquad (1)$$

Επειδή $x \in \mathbb{R}$ για να έχει η (1) λύσεις πραγματικούς αριθμούς πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha(\gamma - y) \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\alpha y \geq 0 \Leftrightarrow 4\alpha y \geq 4\alpha\gamma - \beta^2$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $\alpha > 0$ τότε $y \geq \dfrac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ και η $\phi(x)$ έχει ελάχιστο το $\dfrac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ για $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$

ii) $\alpha < 0$ τότε $y \leq \dfrac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ και η $\phi(x)$ έχει μέγιστο το $\dfrac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$, για $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$

β) Έχουμε: $P(\kappa) - P(\lambda) =$

$= (\alpha\kappa^3 + \beta\kappa^2 + \gamma\kappa + \delta) - (\alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta) =$

$= \alpha(\kappa^3 - \lambda^3) + \beta(\kappa^2 - \lambda^2) + \gamma(\kappa - \lambda) =$

$= (\kappa - \lambda)[\alpha(\kappa^2 + \kappa\lambda + \lambda^2) + \beta(\kappa + \lambda) + \gamma] =$

$= (\kappa - \lambda)[\alpha(\kappa + \lambda)^2 - \alpha\kappa\lambda + \beta(\kappa + \lambda) + \gamma] \Rightarrow P(\kappa) - P(\lambda) =$

$= (\kappa - \lambda)[\alpha(\kappa + \lambda)^2 - \alpha\kappa\lambda + \beta(\kappa + \lambda) + \gamma]$

και επειδή $\kappa \neq \lambda$ διαιρώντας με $\kappa - \lambda$ και τα δύο μέλη έχουμε: $\dfrac{P(\kappa) - P(\lambda)}{\kappa - \lambda} =$

$$= \frac{(\kappa - \lambda)[\alpha(\kappa + \lambda)^2 - \alpha\kappa\lambda + \beta(\kappa + \lambda) + \gamma]}{\kappa - \lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P(\kappa) - P(\lambda)}{\kappa - \lambda} = \alpha(\kappa + \lambda)^2 - \alpha\kappa\lambda + \beta(\kappa + \lambda) + \gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{P(\kappa) - P(\lambda)}{\kappa - \lambda}\right| = |\alpha(\kappa + \lambda)^2 - \alpha\kappa\lambda + \beta(\kappa + \lambda) + \gamma| \qquad (1)$$

Επειδή $\alpha > 0$ και $\beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0$ θα είναι

$$\alpha(\kappa + \lambda)^2 + \beta(\kappa + \lambda) + \gamma \geq 0 \quad \forall (\kappa + \lambda) \in \mathbb{R}$$

Επειδή $\kappa\lambda \leq 0$ και $\alpha > 0$ έχουμε:

$$\alpha\kappa\lambda \leq 0 \Rightarrow -\alpha\kappa\lambda \geq 0.$$

Άρα $\qquad \alpha(\kappa+\lambda)^2 - \alpha\kappa\lambda + \beta(\kappa+\lambda) + \gamma \geqslant 0$

και η (1) γράφεται:

$$\left|\frac{P(\kappa)-P(\lambda)}{\kappa-\lambda}\right| = \alpha(\kappa+\lambda)^2 - \alpha\kappa\lambda + \beta(\kappa+\lambda) + \gamma \geqslant$$

$$\geqslant \alpha(\kappa+\lambda)^2 + \beta(\kappa+\lambda) + \gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{P(\kappa)-P(\lambda)}{\kappa-\lambda}\right| \geqslant \alpha(\kappa+\lambda)^2 + \beta(\kappa+\lambda) + \gamma \qquad (2)$$

Το τριώνυμο $\alpha(\kappa+\lambda)^2 + \beta(\kappa+\lambda) + \gamma$, επειδή $\alpha > 0$ και $\beta^2 - 4\alpha\gamma \leqslant 0$ έχει ελάχιστο το $\dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ και η (2) γίνεται:

$$\left|\frac{P(\kappa)-P(\lambda)}{\kappa-\lambda}\right| \geqslant \alpha(\kappa+\lambda)^2 + \beta(\kappa+\lambda) + \gamma \geqslant \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$$

και τελικά $\qquad \left|\dfrac{P(\kappa)-P(\lambda)}{\kappa-\lambda}\right| \geqslant \dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}.$

ζήτημα τρίτο

Για κάθε όχι αρνητικό πραγματικό αριθμό α να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + iy$, όπου x και y πραγματικοί αριθμοί, που ικανοποιούν την ισότητα:

$$|z|^2 - 2iz + 2\cdot\alpha\cdot(1+i) = 0 \qquad (1)$$

(Σημείωση: Το i είναι η φανταστική μονάδα).

απάντηση

Γνωρίζουμε ότι $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow |z|^2 = x^2 + y^2$ και η (1)

γράφεται: $\qquad x^2 + y^2 - 2i(x+iy) + 2\alpha(1+i) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ix - 2i^2y + 2\alpha + 2\alpha i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y + 2\alpha + 2(\alpha - x)i = 0$$

από την οποία έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+2y+2\alpha=0 \\ \alpha-x=0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} y^2+2y+\alpha^2+2\alpha=0 \\ x=\alpha \end{aligned}\right. \qquad (2)$$

Επειδή $y \in \mathbb{R}$, πρέπει

$$\Delta = 1-(\alpha^2+2\alpha) \geqslant 0 \Leftrightarrow -(\alpha^2+2\alpha-1) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha-1 \leqslant 0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{2} \leqslant \alpha \leqslant -1+\sqrt{2}$$

και επειδή $\alpha \geqslant 0$, έχουμε: $\qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant -1+\sqrt{2}$

Οι ρίζες της (2) είναι: $\qquad y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-\alpha^2-2\alpha}$

και οι λύσεις της εξίσωσης είναι:

$$z = \alpha + i\,(-1 \pm \sqrt{1-\alpha^2-2\alpha}),$$

με $\qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant -1+\sqrt{2}.$

ζήτημα τέταρτο

α) Να αποδείξετε ότι $\log_\alpha x = (\log_\alpha \beta)\cdot(\log_\beta x)$, (1) όπου α, β, x είναι θετικοί αριθμοί, $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$.

β) Δίνεται η συνάρτηση: $\phi(x) = \log_\alpha x + \log_\beta x$.

Να εκφράσετε αυτή τη συνάρτηση με τη βοήθεια του λογάριθμου x με βάση το γινόμενο $\alpha\cdot\beta$ ($\log_{\alpha\beta} x$) και του λογάριθμου α με βάση β ($\log_\beta \alpha$).

Στη συνέχεια να προσδιορίσετε το πρόσημο της συνάρτησης αυτής για τις διάφορες θετικές τιμές του x με την προϋπόθεση ότι $0<\alpha<1$ και $\beta>1$.

απάντηση

α) $\qquad \log_\beta x = \omega \Leftrightarrow \beta^\omega = x \Leftrightarrow \log_\alpha x = \log_\alpha \beta^\omega \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_\alpha x = \omega\log_\alpha \beta \Leftrightarrow \log_\alpha x = \log_\alpha \beta \cdot \log_\beta x.$$

β) $\phi(x) = \log_\alpha x + \log_\beta x =$

$$= \log_{\alpha\beta} x \cdot \log_\alpha(\alpha\beta) + \log_{\alpha\beta} x\, \log_\beta \alpha\beta =$$

$$= \log_{\alpha\beta} x\,[1+\log_\alpha \beta + \log_\beta \alpha + 1] =$$

$$= \log_{\alpha\beta} x \left(\frac{1}{\log_\beta \alpha} + \log_\beta \alpha + 2\right) = \log_{\alpha\beta} x\, \frac{(\log_\beta \alpha + 1)^2}{\log_\beta \alpha}$$

με την πρόσθετη υπόθεση $\alpha\beta \neq 1$.

Έχουμε: $\left.\begin{array}{r} 0<\alpha<1 \\ \beta>1 \end{array}\right\} \Rightarrow \log_\beta \alpha < 0$ και $\log_\beta \alpha \neq -1$

αφού $\alpha\beta \neq 1$

Άρα το πρόσημο της $\phi(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο της $\log_{\alpha\beta} x$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha\beta>1 \begin{cases} 0<x<1 \Rightarrow \log_{\alpha\beta} x<0 \text{ Άρα } \phi(x)>0 \ \forall x \in (0,1) \\ x>1 \Rightarrow \log_{\alpha\beta} x>0 \text{ Άρα } \phi(x)<0 \ \forall x \in (1,+\infty) \\ x=1 \Rightarrow \log_{\alpha\beta} 1=0 \text{ Άρα } f(x)=0 \end{cases}$

- $0<\alpha\beta<1: \begin{cases} 0<x<1 \Rightarrow \log_{\alpha\beta} x>0 \text{ Άρα } \phi(x)<0 \ \forall x \in (0,1) \\ x>1 \Rightarrow \log_{\alpha\beta} x<0 \text{ Άρα } \phi(x)>0 \ \forall x \in (1,+\infty) \\ x=1 \Rightarrow \log_{\alpha\beta} x=0 \text{ Άρα } \phi(x)=0 \end{cases}$

1977

οικονομικός κύκλος

ζήτημα πρώτο

α) Δώστε τον ορισμό της αρμονικής προόδου

β) Να δείξετε ότι, για να είναι οι διάφοροι μεταξύ τους πραγματικοί αριθμοί α, β, γ με τις σειρά που δίδονται, διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου, πρέπει και αρκεί οι αριθμοί αυτοί να είναι διάφοροι του μηδενός και να πληρούν την αναλογία: $$\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}$$

απάντηση

α) Θεωρία

β) Αφού οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου θα είναι $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\neq 0$, και οι $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ θα είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Τότε $$\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}\Rightarrow\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}=\frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha\beta}{\beta\gamma}\Rightarrow\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}\qquad(1)$$

αφού $\beta\neq\gamma$ από υπόθεση.

Αντίστροφα: η (1) γράφεται:

$$\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}\Rightarrow\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}=\frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma}\Rightarrow\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}$$

άρα οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και επομένως οι α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους αρμονικής προόδου.

ζήτημα δεύτερο

Να λυθεί το σύστημα: $y = x^{\sqrt{y}}$ (1)

$x^4 = y^{\sqrt{y}}$ (2)

όπου x, y θετικοί αριθμοί

απάντηση

$$\left.\begin{array}{l} y = x^{\sqrt{y}} \\ x^4 = y^{\sqrt{y}} \\ x, y \in R_+^* \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \log y = \sqrt{y}\log x \\ 4\log x = \sqrt{y}\log y \\ x, y > 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \log y = \sqrt{y}\log x \\ 4\log x = \sqrt{y}\log y \\ 4\log x \log y = y\log x \log y \\ x, y > 0 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \log y = \sqrt{y}\log x \\ 4\log x = \sqrt{y}\log y \\ \log x \log y\,(y-4) = 0 \\ x > 0,\ y > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \log y = \sqrt{y}\log x \\ 4\log x = \sqrt{y}\log y \\ \log x = 0 \\ x, y > 0 \end{array} \quad ή$$

$$ή \quad \begin{array}{l} \log y = \sqrt{y}\log x \\ 4\log x = \sqrt{y}\log y \\ \log y = 0 \\ x, y > 0 \end{array} \quad ή \quad \begin{array}{l} \log y = \sqrt{y}\log x \\ 4\log x = \sqrt{y}\log y \\ y = 4 \\ x, y > 0 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 1 \end{pmatrix} ή \begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 1 \end{pmatrix} ή \begin{pmatrix} x = 2 \\ y = 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 1 \end{pmatrix} ή \begin{pmatrix} x = 2 \\ y = 4 \end{pmatrix}$$

1978

πολυτεχνικός — φυσικομαθηματικός γεωπονοδασολογικός κύκλος

ζήτημα πρώτο

Αν φ συνάρτηση του Α στο Β και σ συνάρτηση του Β στο Γ τότε τη σύνθεση της φ με τη σ θα την παραστήσουμε, όπως συνηθίζεται με σ ο φ.

α) Να δείξετε ότι η σύνθεση συναρτήσεων έχει την προσεταιριστική ιδιότητα.

β) Αν είναι φ συνάρτηση του Α στο Α, τότε ορίζουμε $\phi_1 = \phi$ και $\phi_{\nu+1} = \phi_1 \circ \phi_\nu$ $\forall \nu \in N$. A_ν Αν είναι το σύνολο τιμών της ϕ_ν, να δείξετε ότι για κάθε φυσικό ν το σύνολο $A_{\nu+1}$ είναι υποσύνολο του A_ν.

γ) Αν η φ είναι επί του Α, να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για τη συνάρτηση ϕ_ν, $\forall \nu \in N$

απάντηση

Έχουμε $\Delta_\phi = A$, $\Delta_\sigma = B$, $\Delta_g = \Gamma$

Η συνάρτηση $y = go(\sigma o\phi)(x)$ έχει πεδίο ορισμού το

$$\Delta_{go(\sigma o\phi)} = \{x : x \in \Delta_{\sigma o\phi} \wedge \sigma(\phi(x)) \in \Delta_g\} =$$
$$= \{x : x \in \Delta_\phi \wedge \phi(x) \in \Delta_\sigma \wedge \sigma(\phi(x)) \in \Delta_g\} =$$
$$= \{x : x \in A \wedge \phi(x) \in B \wedge \sigma(\phi(x)) \in \Gamma\} = \Delta \qquad (1)$$

Η συνάρτηση $y = (go\sigma)o\phi\ (x)$ έχει πεδίο ορισμού το

$$\Delta_{(go\sigma)o\phi} = \{x : x \in \Delta_\phi \wedge \phi(x) \in \Delta_{go\sigma}\} =$$
$$= \{x : x \in \Delta_\phi \wedge \phi(x) \in \Delta_\sigma \wedge \sigma(\phi(x)) \in \Delta_g\} =$$
$$= \{x : x \in A \wedge \phi(x) \in B \wedge \sigma(\phi(x)) \in \Gamma\} = \Delta \qquad (2)$$

Από (1) $\wedge$ (2) φαίνεται ότι οι $go(\sigma o\phi) \wedge (go\sigma)o\phi$ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Δ.

Επίσης έχουμε:

$$\forall x \in \Delta: go(\sigma o\phi)(x) = g((\sigma o\phi)(x)) = g(\sigma(\phi(x)))$$
$$\wedge$$
$$(go\sigma)o\phi\ (x) = (go\sigma)(\phi(x)) = g(\sigma(\phi(x)))$$

Άρα $(go\sigma)o\phi = go(\sigma o\phi)$.

β) Θα δείξουμε ότι: $\phi_1 o\phi_\nu = \phi_\nu o\phi_1\ \forall \nu \in N^*$ (επαγωγικά).

Υ	$\nu = 1$ ισχύει $\phi_1 o\phi_\nu = \phi_\nu o\phi_1$
Σ	$\phi_1 o\phi_{\nu+1} = \phi_{\nu+1} o\phi_1$

Έχουμε: $\phi_1 o\phi_{\nu+1} = \phi_1 o(\phi_1 o\phi_\nu) = \phi_1 o(\phi_\nu o\phi_1) =$

$$= (\phi_1 o\phi_\nu)\ o\ \phi_1 = \phi_{\nu+1} o\phi_1$$

Άρα $\phi_1 o\phi_\nu = \phi_\nu o\phi_1\ \forall \nu \in N^*$

Έχουμε: $A_{\nu+1} = \phi_{\nu+1}(A) = (\phi_1 o\phi_\nu)\ (A) = (\phi_\nu o\phi_1)\ (A) =$

$$= \phi_\nu(\phi_1(A)) \subseteq \phi_\nu\ (A) = A_\nu \Rightarrow A_{\nu+1} \subseteq A_\nu\ \forall \nu \in N^*$$

γ) $\phi_1(A) = A$

Άρα $A_{\nu+1} = \phi_{\nu+1}\ (A) = (\phi_1 o\phi_\nu)\ (A) = (\phi_\nu o\phi_1)\ (A) =$

$$= \phi_\nu(\phi_1(A)) = \phi_\nu(A) = A_\nu\ \forall \nu \in N^*$$

Άρα όλες οι συναρτήσεις ϕ_ν είναι **επί** του A.

ζήτημα δεύτερο

Αν είναι $y = x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$, να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση: $1 < \log_y\left(\frac{x-2}{x}\right)$. (1)

Να διακρίνετε τις περιπτώσεις $y > 1$ και $o < y < 1$.

απάντηση

Ας θέσουμε $f(x) = \log_y \left(\dfrac{x-2}{x}\right)$ με $y = x^2 - \dfrac{4}{3}x - \dfrac{4}{3}$

Είναι $\Delta\ (f) =$

$$= \left\{x\colon x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} > 0,\ x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} \neq 1 \text{ και } \frac{x-2}{x} > 0\right\}$$

$$= \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty) - \left\{-1, \frac{7}{3}\right\}$$

Για κάθε $x \in \Delta\ (f)$ είναι:

$$1 < \log_y\left(\frac{x-2}{x}\right) \Leftrightarrow \log_y y < \log_y\left(\frac{x-2}{x}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} y > 1 \\ y < \dfrac{x-2}{x} \end{cases} (\Sigma_1) \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 0 < y < 1 \\ y > \dfrac{x-2}{x} \end{cases} (\Sigma_2)\right)$$

α) $$(\Sigma_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{4}{3}x - \dfrac{4}{3} > 1 & (2) \\ x^2 - \dfrac{4}{3}x - \dfrac{4}{3} < \dfrac{x-2}{x} & (3) \end{cases}$$

όμως:

$$(2) \quad \Leftrightarrow 3\left(x - \frac{7}{3}\right)(x+1) > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ ή } x > \frac{7}{3}$$

$$(3) \Leftrightarrow 3x\,(x-2)\left(x - \frac{-1+\sqrt{10}}{3}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{10}}{3}\right) < 0 \Rightarrow$$

$$\frac{-1-\sqrt{10}}{3} < x < 0 \text{ ή } \frac{-1+\sqrt{10}}{3} < x < 2$$

και οι (2), (3) συναληθεύουν για $\quad x \in \left(\dfrac{-1-\sqrt{10}}{3}, -1\right)$.

'Ομως πρέπει $x \in \Delta(f)$ και άρα τα $x \in \left(\frac{-1-\sqrt{10}}{3}, -1\right)$

είναι λύσεις της ανίσωσης

β) $(\Sigma_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} < 1 & (4) \\ x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} > \frac{x-2}{x} & (5) \end{cases}$

Από (4) $\Rightarrow 2 < x < \frac{7}{3}$

Από (5) $\Rightarrow -\infty < x < \frac{-1-\sqrt{10}}{3}$ ή $0 < x < \frac{-1+\sqrt{10}}{3}$

ή $x > 2$ Πρέπει $x \in \Delta(f)$. 'Αρα τα $-\infty < x < \frac{-1-\sqrt{10}}{3}$

ή τα $x > 2$ είναι λύσεις της ανίσωσης.

ζήτημα τρίτο

α) Να δώσετε τον ορισμό του ορίου συνάρτησης $\phi(x)$ όταν του $x \to x_0$ η συνάρτηση έχει όριο τον πραγματικό αριθμό y_0.

β) Να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία του ορισμού αυτού ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

γ) Να βρείτε χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες, το όριο της συνάρτησης $\phi(x) = \frac{x^2 - 3x + 20}{3x - 4}$ όταν $x \to 3$

απάντηση

α) Θεωρία

β) Θεωρία

γ) Είναι: $\lim\limits_{x\to 3} (x^2 - 3x + 20) = 3^2 - 3 \cdot 3 + 2. = 20,$

$\lim\limits_{x\to 3} (3x - 4) = 3 \cdot 3 - 4 = 5$

και άρα $\lim\limits_{x\to 3} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2 - 3x + 20)}{\lim\limits_{x\to 3}(3x - 4)} = \frac{20}{5} = 4$

ζήτημα τέταρτο

α) Χρησιμοποιώντας τις μεθόδους του διαφορικού λογισμού να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

$$y = 1 + \sqrt[5]{(x+2)^4} \quad \text{στο} \quad \Delta = [-3, -1]$$

β) Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle για την προηγούμενη συνάρτηση στο διάστημα Δ.

απάντηση

α) Έχουμε $f(x) = 1 + \sqrt[5]{(x+2)^4} \mid [-3, -1]$

1. $\Delta_f = [-3, -1]$

2. Συνεχής στο Δ_f ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

3. $f(-3) = 2 = f(-1)$

4. Πλάγιες — οριζόντιες — κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν υπάρχουν αφού τα $\pm\infty$ δεν είναι άκρα του Δ_f και τούτο δεν διακόπτεται πουθενά.

5. α) $f'(x) \underset{?}{=}$

i) $x \in \Delta_f - \{-2\}$ είναι

$$f'(x) = \left(\sqrt[5]{(x+2)^4}\right)' = \left[e^{\frac{1}{5}\ln(x+2)^4}\right]' =$$

$$= \sqrt[5]{(x+2)^4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(x+2)^4} \cdot 4\,(x+2)^3 = \frac{4\sqrt[5]{(x+2)^4}}{5\,(x+2)}$$

ii) $x = -2$

$$f'_\delta(-2) = \lim_{x\to-2^+} \frac{1+\sqrt[5]{(x+2)^4}-1}{x+2} = \lim_{x\to-2^+} \frac{\sqrt[5]{(x+2)^4}}{x+2} =$$

$$= \lim_{x\to-2^+} \sqrt[5]{\frac{1}{x+2}} = +\infty$$

$$f'_\alpha(-2) = \lim_{x\to-2^-} \frac{\sqrt[5]{(x+2)^4}}{x+2} = -\lim_{x\to-2^-} \sqrt[5]{\frac{1}{(-x-2)}} = -\infty$$

Άρα $f'(-2) = \nexists$

β) Παρατηρούμε ότι η $f'(x)$ δεν μηδενίζεται στο

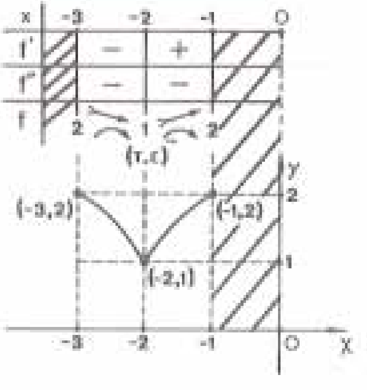
$$[-3-2) \cup (-2,-1]$$

$$\beta)\ f''(x) = \frac{4}{5}\left(\frac{\sqrt[5]{(x+2)^4}}{x+2}\right)' =$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{\frac{4}{5}\frac{\sqrt[5]{(x+2)^4}}{x+2} \cdot (x+2) - \sqrt[5]{(x+2)^4}}{(x+2)^2} =$$

$$= -\frac{4}{25}\frac{\sqrt[5]{(x+2)^4}}{(x+2)} \quad \forall x \in [-3,-2) \cup (-2,-1]$$

6) Πίνακας



β) Η f, δεν πληρεί τις συνθήκες του Rolle. Το συμπέρασμα δεν ξέρουμε τι κάνει στη γενικότητα. Εδώ όμως δεν πληρούται ούτε αυτό αφού η $f'(x)$ δεν μηδενίζεται.

1978

οικονομικός κύκλος

ζήτημα πρώτο

α) Να αποδείξτε την ταυτότητα: $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma) \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha \cdot \beta - \beta \cdot \gamma - \gamma \cdot \alpha)$ (1)

β) Το άθροισμα τριών πραγματικών αριθμών ισούται με 72, το γινόμενο αυτών ισούται με 13.700 και το άθροισμα των τετραγώνων των ισούται με 1730. Να υπολογίσετε το άθροισμα των κύβων των τριών αυτών πραγματικών αριθμών.

Υπόδειξη: Για το δεύτερο μπορείτε να χρησιμοποιήσετε προαιρετικά την προηγούμενη ταυτότητα.

απάντηση

α) Έχουμε: $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma =$

$$= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta\,(\alpha + \beta) + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma =$$

$$= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta\,(\alpha + \beta + \gamma) + \gamma^3 =$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)^3 - 3\,(\alpha + \beta) \cdot \gamma \cdot (\alpha + \beta + \gamma) -$$

$$- 3\,\alpha\beta\,(\alpha + \beta + \gamma) =$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)\,[(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3\,(\alpha + \beta) \cdot \gamma - 3\alpha\beta] =$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma -$$

$$- 3\alpha\gamma - 3\beta\gamma - 3\alpha\beta) = (\alpha + \beta + \gamma)\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 -$$

$$- \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha).$$

β) Έστω x, y, z οι αριθμοί. Σύμφωνα με τις υποθέσεις είναι:

$$\begin{cases} x + y + z = 72 & (2) \\ xyz = 13700 & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1730 & (4) \end{cases}$$

Από (2) $\Rightarrow (x + y + z)^2 = 72^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2\,(xy + yz + zx) = 5184 \qquad (5)$$

Από (4), (5) $\Rightarrow 1730 + 2\,(xy + yz + zx) = 5184 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow xy + yz + zx = 1727 \qquad (6)$$

Είναι: $x^3 + y^3 + z^3 =$

$$= 3xyz + (x + y + z)\,[(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx)]$$

και με βάση τις (2), (3) (4), (6) είναι:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3 \cdot 13.700 + 72\,(1730 - 1727) = 41.316$$

Ζήτημα δεύτερο

Δίνεται η ανίσωση: $\dfrac{3x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1} > \beta$, όπου β πραγματικός αριθμός. Να βρείτε για ποιές ακέραιες και θετικές τιμές του β η ανίσωση επαληθεύεται για κάθε πραγματική τιμή του x.

απάντηση

Το τριώνυμο $x^2 + x + 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ επειδή $\Delta = -3 < 0$ και η ανίσωση γράφεται: $3x^2 + 2x + 2 > \beta x^2 + \beta x + \beta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (3 - \beta)\, x^2 + (2 - \beta)\, x + (2 - \beta) > 0$ (1)

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις i) $3 - \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 3$ και η ανίσωση γράφεται $x < -1$. Άρα πρέπει $3 - \beta \neq 0$

(ii) $3 - \beta \neq 0$

Για να αληθεύει η αρχική ανίσωση $\forall x \in \mathbb{R}$ πρέπει:

$$\begin{cases} 3 - \beta > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta < 3 \\ -3\beta^2 + 16\beta - 20 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta < 3 & (2) \\ 3\beta^2 - 16\beta + 20 > 0 & (3) \end{cases} \quad \text{Από (3)} \Rightarrow \beta < 2 \text{ ή } \beta > \frac{10}{3}.$$

Άρα οι (2), (3) συναληθεύουν για $0 < \beta < 2$ και επειδή $\beta \in \mathbb{Z}^*_+$, είναι $\beta = 1$

1979

πολυτεχνικός — φυσικομαθηματικός γεωπονοδασολογικός κύκλος

Ζήτημα πρώτο

Αν $\Pi(x) = x^2 + 2\,|z_1 - z_2|x + (1 + |z_1|^2)\,(1 + |z_2|^2)$ όπου z_1, z_2 είναι δοσμένοι μιγαδικοί αριθμοί, να δείξετε ότι $\Pi(x) \geqslant 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. Πότε μπορεί να ισχύει η ισότητα;

απάντηση

Το $\Pi(x)$ είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Άρα το πρόσημό του εξαρτάται από το Δ και το α.

Έχουμε:
$$\frac{\Delta}{4} = |z_1 - z_2|^2 - (1 + |z_1|^2)\cdot(1 + |z_2|^2) =$$
$$= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) - (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2) =$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 - 1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 - |z_1z_2|^2 =$$
$$= -(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + 1 + z_1\bar{z}_1\,z_2z_2) =$$
$$= -[z_1\bar{z}_2\,(1 + \bar{z}_1z_2) + (1 + \bar{z}_1z_2)] =$$
$$= -(1 + \bar{z}_1z_2)\cdot(1 + z_1\bar{z}_1) =$$
$$= -|1 + z_1\bar{z}_2|^2 \leq 0$$

Επειδή είναι το Δ του $\Pi(x)$ μικρότερο ή ίσο του μηδενός και $\alpha = 1 > 0$ θα έχουμε $\Pi(x) \geq 0\ \forall\, x \in R$.

Το «=» όταν $\Delta = 0 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 = -1$ και γίνεται τούτο όταν $x = -|z_1 - z_2|$.

ζήτημα δεύτερο

α) Τι καλείται συνδυασμός των ν πραγμάτων ανά κ

β) Να αποδείξετε τον τύπο που δίνει το πλήθος των συνδυασμών των ν πραγμάτων ανά κ. Υποτίθεται ότι $1 \leqslant κ \leqslant ν$.

απάντηση

α) Θεωρία

β) Θεωρία

ζήτημα τρίτο

α) Πότε μια συνάρτηση $φ(x)$ λέγεται συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; Πότε μία συνάρτηση $φ(x)$ λέγεται συνεχής σε ένα διάστημα;

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $φ(x)$ που δίνεται από το τύπο $φ(x) = x^2 \, ημ \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ και $φ(o) = 0$ είναι συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

απάντηση

α) Θεωρία

β) Η συνάρτηση $φ(x)$ γράφεται:

$$φ(x) = \begin{cases} x^2 \, ημ \frac{1}{x}, & αν \quad x \neq 0 \\ 0 \;, & αν \quad x = 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση $φ(x)$ είναι συνεχής $\forall x \in (-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ σαν γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων x^2 και $ημ \frac{1}{x}$

Στο $x_0 = 0$, είναι $f(o) = 0$ και $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, γιατί:

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \quad \text{και η} \quad ημ \frac{1}{x} \quad \text{είναι φραγμένη}$$

Άρα f συνεχής και στο $x_0 = 0$ και επομένως f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ζήτημα τέταρτο

Δίνεται ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές $\Pi(x)$ βαθμού $\geqslant 2$.

α) Να δείξετε ότι αν ο πραγματικός αριθμός ρ είναι πολλαπλή ρίζα του $\Pi(x)$ τότε ο ρ είναι ρίζα της παραγώγου του $\Pi(x)$.

β) Με τη βοήθεια της προηγούμενης ιδιότητας να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α και β ώστε το πολυώνυμο $\Pi(x) = x^4 + (\alpha - \beta)\, x^3 + 2\alpha x^2 - 5x + 4$ να έχει πολλαπλή ρίζα τον αριθμό 1.

απάντηση

α) Αφού το πολυώνυμο $\Pi(x)$ έχει τον πραγματικό αριθμό ρ ρίζα με πολλαπλότητα έστω ν θα έχουμε:

$$\Pi(x) = (x - \rho)^{\nu} \cdot \Pi_1(x) \qquad \text{με } \Pi_1(\rho) \neq 0 \tag{1}$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή έχουμε:

$$\Pi'(x) = \nu(x - \rho)^{\nu-1} \cdot \Pi_1(x) + (x - \rho)^{\nu}\, \Pi_1'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pi'(x) = (x - \rho)^{\nu-1} \cdot [\nu\, \Pi_1(x) + (x - \rho)\, \Pi_1'(x)] \tag{2}$$

Θέτοντας $\quad \phi(x) = \nu\, \Pi_1(x) + (x - \rho)\, \Pi_1'(x) \qquad (3)$

έχουμε $\phi(\rho) = \nu\, \Pi_1(\rho) \neq 0$ λόγω της (1)

Η (2) λόγω της (3) γράφεται $\Pi'(x) = (x - \rho)^{\nu-1} \cdot \phi(x)$ δηλ. η $\Pi'(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό ρ με πολλαπλότητα $\nu - 1$.

Η $x = 1$ είναι ρίζα του $\pi(x)$ πολλαπλή. Άρα η πολλαπλότητα θα είναι τουλάχιστο 2 θάχουμε λοιπόν υποχρεωτικά

$$\Pi(1) = 0 \wedge \Pi'(1) = 0$$

Από τις $\Pi(1) = 0 \wedge \Pi'(1) = 0$

παίρνουμε: $\left.\begin{array}{c} 3\alpha - \beta = 0 \\ \wedge \\ 7\alpha - 3\beta = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \alpha = -\dfrac{1}{2} \\ \wedge \\ \beta = -\dfrac{3}{2} \end{array}$

Το $\Pi(x)$ τότε γίνεται: $\Pi(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 5x + 4$

Έχουμε: $\Pi'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x - 5$

$$\Pi''(x) = 12x^2 + 6x - 2 \wedge \Pi''(1) \neq 0.$$

Άρα η πολλαπλότητα της ρίζας $x = 1$ είναι 2.

1979

οικονομικός κύκλος

ζήτημα πρώτο

Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι ρητοί αριθμοί και οι β, δ είναι θετικοί και όχι τετράγωνα ρητών, να δείξετε ότι $\alpha + \sqrt{\beta} = \gamma + \sqrt{\delta}$, όταν και μόνο όταν $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$.

απάντηση

Αν $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$ τότε η σχέση προφανώς ισχύει γιατί:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \gamma \\ \beta = \delta\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c}\alpha = \gamma \\ \sqrt{\beta} = \sqrt{\delta}\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + \sqrt{\beta} = \gamma + \sqrt{\delta}$$

Αντίστροφα:

αν $\quad \alpha + \sqrt{\beta} = \gamma + \sqrt{\delta} \Rightarrow \sqrt{\beta} = \gamma - \alpha + \sqrt{\delta} \Rightarrow (\sqrt{\beta})^2 =$

$$= (\gamma - \alpha + \sqrt{\delta})^2 \Rightarrow \beta = (\gamma - \alpha)^2 + \delta + 2\,(\gamma - \alpha)\,\sqrt{\delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\,(\gamma - \alpha)\,\sqrt{\delta} = (\beta - \delta) - (\gamma - \alpha)^2$$

Επειδή το δεύτερο μέλος είναι ρητός αριθμός πρέπει και το πρώτο μέλος να είναι ρητός δηλ. $2\,(\gamma - \alpha)\,\sqrt{\delta}$ ρητός. Αυτό συμβαίνει όταν $\quad \alpha - \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \gamma$.

Για $\alpha = \gamma$ η σχέση $\alpha + \sqrt{\beta} = \gamma + \sqrt{\delta}$ γίνεται:

$$\sqrt{\beta} = \sqrt{\delta} \Leftrightarrow \beta = \delta.$$

ζήτημα δεύτερο

Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών το σύστημα:

$$\begin{cases} 2^y - 2^x = 4 & (1) \\ \log(2x+2) - \log(3+y) = 0 & (2) \end{cases}$$

απάντηση

Για να έχουν νόημα οι $\log(2x+2)$ και $\log(3+y)$ πρέπει

$$2x+2 > 0 \Leftrightarrow 2x > -2 \Leftrightarrow x > -1$$

και $3 + y > 0 \Leftrightarrow y > -3$

Η (2) γράφετε:

$$\log(2x+2) - \log(3+y) = 0 \Leftrightarrow \log\frac{2x+2}{3+y} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log\frac{2x+2}{3+y} = \log 1 \Leftrightarrow \frac{2x+2}{3+y} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+2 = 3+y \Leftrightarrow y = 2x-1 \qquad (3)$$

Για $y = 2x - 1$ η (2) γράφεται:

$$2^{2x-1} - 2^x = 4 \Leftrightarrow \frac{2^{2x}}{2} - 2^x = 4 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2\cdot 2^x - 8 = 0$$

θέτοντας $y = 2^x$ έχουμε:

$$y^2 - 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow (y = 4 \text{ ή } y = -2)$$

Άρα $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$ και $2^x = -2$ που δεν ισχύει, γιατί $2^x > 0$
Για $x = 2$ έχουμε από την (3) $y = 2\cdot 2 - 1 \Leftrightarrow y = 3$
Άρα το σύστημα έχει λύση $(x, y) = (2, 3)$

1980

πανελλήνιες εξετάσεις γ΄ λυκείου

τύπος 2

ζήτημα πρώτο

α) Αν το όριο της ακολουθίας α_ν είναι το $+\infty$ και το όριο της ακολουθίας β_ν είναι το $+\infty$, να αποδειχθεί ότι το όριο της ακολουθίας του αθροίσματος $\alpha_\nu + \beta_\nu$ είναι το $+\infty$.

β) Να αποδειχθεί η πρόταση: κάθε συνάρτηση παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα είναι συνεχής στο διάστημα αυτό.

απάντηση

α) Θεωρία
β) Θεωρία

ζήτημα δεύτερο

α) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{|x|\,(x-1)}{x}$ $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ και $f(x) = 1$ για $x = 0$. Να εξετασθεί αν είναι συνεχής και να γίνει η γραφική παράσταση αυτής.

β) Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης:
$y = -x + \sqrt{x^2 + 2x + 3}$, όταν το x τείνει στο $+\infty$

απάντηση

α) Η $f(x) = \dfrac{|x|\,(x-1)}{x}$ γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\,(x-1)}{x} = x - 1 & \text{αν } x > 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \\ -\dfrac{x\,(x-1)}{x} = 1 - x & \text{αν } x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 1, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ 1 - x, & x < 0 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής $\forall\, x \in (-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική.

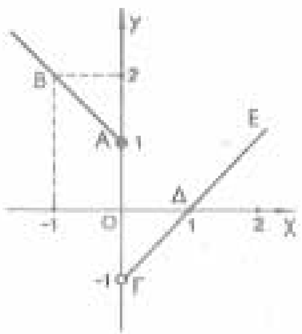
Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x-1) = 0 - 1 = -1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (1-x) = 1 - 0 = 1$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ η συνάτηση $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & α,\ x > 0 \\ 1 & α,\ x = 0 \\ 1 - x & α,\ x > 0 \end{cases}$$



είναι οι ημιευθείες ΑΒ και ΓΕ εκτός του σημείου Γ (0, − 1)

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x + \sqrt{x^2 + 2x + 3}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3} + x} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{\left(|x|\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2 + \frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)} = 1.$$

ζήτημα τρίτο

α) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε η συνάρτηση $y = \alpha x^3 + \beta x^2 - 6x + 1$ να δέχεται τοπικά ακρότατα στα σημεία $x = 1$ και $x = -2$

β) Να μελετηθεί η μονοτονία της παραπάνω συνάρτησης (αφού αντικατασταθούν τα α και β με τις τιμές τους).

απάντηση

α) Θέλουμε η $y = f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 6x + 1$ νάχει στις θέσεις $x = 1$ και $x = -2$ ακρότατα. Αυτά πρέπει αρχικά να απαιτήσουμε νάναι πιθανά ακρότατα. Επειδή η f ορίζεται στο R και παραγωγίζεται σε όλο το R πιθανά ακρότατα είναι **μόνο** αυτά που μηδενίζουν την $f'(x)$. Θα πρέπει λοιπόν αρχικά να συμβαίνουν:

$$\left.\begin{array}{c} f'(1) = 0 \\ \wedge \\ f'(-2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\alpha + 2\beta = 6 \\ 6\alpha - 2\beta = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = 1 \wedge \beta = \frac{3}{2}$$

Έχουμε λοιπόν εξασφαλίσει νάναι τα $x = 1, -2$ πιθανά ακρότατα. Για νάναι αυτά πραγματικά ακρότατα θα πρέπει να απαιτήσουμε η $f'(x)$ να αλλάξει πρόσημο δεξιά — αριστερά των σημείων μηδενισμού της. Παρατηρούμε ότι η

$$f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x - 6 = 3x^2 + 3x - 6$$

είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο με ρίζες $x = 1 \wedge x = -2$ και πράγματι αλλάζει πρόσημο δεξιά — αριστερά των σημείων μηδενισμού. Άρα όταν το

$$\alpha = 1 \wedge \beta = \frac{3}{2}$$

η $f(x)$ έχει πράγματι στα $x = 1 \wedge x = -2$ ακρότατα.

β) $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 3x - 6$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	

Ζήτημα τέταρτο

Δίνονται τα σημεία Α (1, 1), Β (− 1, 3) και Γ (2, − 4):

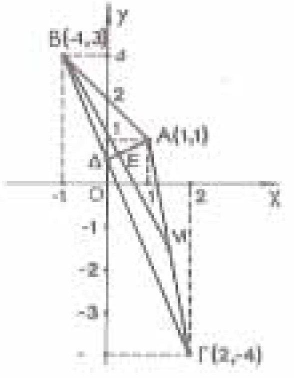
α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας του ύψους του τριγώνου ΑΒΓ που διέρχεται από το σημείο Α.

β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας της διαμέσου του τριγώνου ΑΒΓ που διέρχεται από το σημείο Β.

γ) Να βρεθεί το σημείο τομής των παραπάνω ευθειών.

απάντηση

α)



Το διάνυσμα $\vec{\delta}\ (3,\ -7)\ /\!/\ \text{ΒΓ} \wedge$ το διάνυσμα

$$\vec{\delta_1}\ (x-1,\ y-1)\ /\!/\ (\text{ΑΔ}).$$

Επειδή $\quad \text{ΒΓ} \perp \text{ΑΔ} \Rightarrow \vec{\delta} \perp \vec{\delta_1} \Rightarrow \vec{\delta}\cdot\vec{\delta_1} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3(x-1) - 7(y-1) = 0 \Rightarrow 3x - 7y + 4 = 0$$

Άρα η εξίσωση του ύψους ΑΔ είναι η $3x - 7y + 4 = 0$.

β) Αν Μ το μέσο της ΑΓ τότε οι συντεταγμένες του είναι

$\frac{3}{2}$ και $-\frac{3}{2}$. Η ΒΜ έχει εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3/2 & -3/2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x + 9 = -5y + 15 \Leftrightarrow 9x + 5y - 6 = 0 \qquad (3)$$

γ) Από $\begin{cases} 3x - 7y + 4 = 0 \\ 9x + 5y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{11}{13}, \frac{9}{13}\right)$

Άρα το σημείο τομής είναι το Ε $\left(\frac{11}{13}, \frac{9}{13}\right)$

1981

πανελλήνιες εξετάσεις γ΄ λυκείου

τύπος 2

ζήτημα πρώτο

α) Να βρεθεί το $\lim_{x \to -1^-} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{|x| - 1}$

β) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$.
Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και η οριακή τιμή της όταν $x \to -2$.

απάντηση

α) Επειδή $x \to -1^-$ είναι $x < -1$ και άρα $|x| = -x$,

επομένως: $$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{|x| - 1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{-x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to -1^-} \frac{(x-1)^2}{-(x+1)} = -\lim_{x \to -1^-} (x-1)^2 \frac{1}{x+1} = +\infty$$

αφού $\lim_{x \to -1^-} (x-1)^2 = 4 > 0$ και $\lim_{x \to -1^-} \dfrac{-1}{x+1} = +\infty$.

β) Πρέπει $x^2 + x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \neq -2$ και $x \neq 1)$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης y είναι:

$A = \mathbb{R} - \{-2, 1\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$

$\forall x \in A$ έχουμε:

$$y = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x^2+1}{x+2}.$$

Για να βρούμε το όριο της συνάρτησης όταν $x \to -2$ πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια στο $x_0 = -2$.

Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-2^-} \frac{x^2+1}{x+2} &= \lim_{x\to-2^-} (x^2+1)\,\frac{1}{x+2} = -\infty \\ \lim_{x\to-2^+} \frac{x^2+1}{x+2} &= \lim_{x\to-2^+} (x^2+1)\,\frac{1}{x+2} = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-2} \frac{x^2+1}{x+2} = \nexists$$

ζήτημα δεύτερο

α) Να αποδειχθεί η ιδιότητα:

Αν $\lim \alpha_\nu = \alpha$ και $\lim \beta_\nu = \beta$, τότε υπάρχει το $\lim (\alpha_\nu\, \beta_\nu)$ και ισούται με αβ. Δηλαδή: $\lim (\alpha_\nu\, \beta_\nu) = \lim (\alpha_\nu) \cdot \lim (\beta_\nu)$.

β) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $\alpha_\nu = \omega^\nu$, όπου $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ και ω πραγματικός αριθμός με $|\omega| < 1$, είναι μηδενική.

απάντηση

α) Θεωρία

β) i) $\omega = 0 \Rightarrow \alpha_\nu = 0^\nu = 0 \to 0$

ii) $\omega \neq 0 \Rightarrow 0 < |\omega| < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{|\omega|} > 1 \Rightarrow \left.\dfrac{1}{|\omega|} = \underset{\theta > 0}{1 + \theta}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\omega|^\nu} = (1+\theta)^\nu \geqslant 1 + \nu\theta > \nu\theta \Rightarrow \left.\frac{1}{|\omega|^\nu} > \underset{\theta > 0}{\nu\theta}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\underset{\theta > 0}{|\omega|^\nu < \frac{1}{\nu\theta}}\right\} \Rightarrow \left.\underset{\frac{1}{\nu\theta} \to 0}{|\omega|^\nu < \frac{1}{\nu\theta}}\right\} \Rightarrow \omega^\nu \to 0$$

ζήτημα τρίτο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 2, -1)$, $\vec{\beta} = (1, -3, 2)$ και $\vec{\gamma} = (1, 1, -\frac{1}{2})$

α) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσεις από τις οποίες η μία να έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

β) Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

γ) Να εξηγήσετε γιατί το διάνυσμα $\vec{\beta}$ δεν μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις τις διευθύνσεις των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$

απάντηση

α) Πρέπει να βρούμε δύο διανύσματα $\vec{\beta}_1 \ (\neq \vec{o})$ και $\vec{\beta}_2 \ (\neq \vec{o})$

ώστε: $$\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2, \ \vec{\beta}_1 \perp \vec{\beta}_2 \wedge \vec{\beta}_1 \parallel \vec{\alpha}.$$

Αλλά $$\vec{\beta}_1 \perp \vec{\beta}_2 \Leftrightarrow \vec{\beta}_1 \vec{\beta}_2 = 0$$

και $$\vec{\beta}_1 \parallel \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\beta}_1 = \lambda\vec{\alpha} \quad \text{με} \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{o\}.$$

Έτσι έχουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 \\ \vec{\beta}_1 = \lambda\vec{\alpha} \\ \vec{\beta}_1 \vec{\beta}_2 = 0 \\ \lambda \neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \vec{\beta}_2 = \vec{\beta} - \vec{\beta}_1 = \vec{\beta} - \lambda\vec{\alpha} & (1) \\ \vec{\beta}_1 = \lambda\vec{\alpha} & (2) \\ \lambda\vec{\alpha}\,(\vec{\beta} - \lambda\vec{\alpha}) = 0 & (3) \\ \lambda \neq 0 & \end{array}$$

Από την (3) έχουμε $\lambda\vec{\alpha}\,\vec{\beta} - \lambda^2\,\vec{\alpha}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\,\vec{\beta} - \lambda\,|\vec{\alpha}|^2 = 0$ διότι $\lambda \neq 0$ και $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$ τότε $\lambda = \dfrac{\vec{\alpha}\,\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2} =$

$$= \frac{2 - 6 - 2}{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3}$$

Τότε από την (2) έχουμε:

$$\vec{\beta}_1 = -\frac{2}{3}\,(2, 2, -1) = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

και από την (1) έχουμε:

$$\vec{\beta}_2 = \left(1 + \frac{4}{3}, -3 + \frac{4}{3}, 2 - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

β) Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 2, -1)$ και $\vec{\gamma} = \left(1, 1, -\frac{1}{2}\right)$ είναι παράλληλα γιατί $\vec{\alpha} = 2\vec{\gamma}$. Άρα τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Επομένως και τα $\vec{\alpha}, \vec{\gamma}, \vec{\beta}$.

γ) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$ είναι της ίδιας διεύθυνσης και επομένως δεν έχουμε δύο διαφορετικές διευθύνσεις, στις οποίες μπορούμε να αναλύσουμε το διάνυσμα $\vec{\beta}$.

ζήτημα τέταρτο

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $9x^2 - 16y^2 = 144$, με εστίες Ε΄ και Ε και σημείο Α (λ, μ) πάνω στην υπερβολή.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, που περνά από τα σημεία Α και Ε΄ και της ευθείας που περνά από τα σημεία Α και Ε.

β) Να προσδιορισθούν τα σημεία Α για τα οποία οι παραπάνω ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους.

απάντηση

α) Η εξίσωση της υπερβολής γράφεται: $\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ και τέμνει τον άξονα των x στα σημεία με συντεταγμένες (4, 0) και (− 4, 0). Άρα είναι $\alpha = 4$, $\beta = 3$ και επειδή για την υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ισχύει $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$, είναι: $\gamma^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Leftrightarrow \gamma = 5$.

Άρα είναι Ε΄ (− 5, 0) και Ε (5, 0).

Η ευθεία ΑΕ΄ διέρχεται από τα σημεία Α (λ,μ) $\wedge$ Ε΄ (− 5, 0)

Άρα έχει εξίσωση την $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \lambda & \mu & 1 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu x - (\lambda + 5)\, y + 5\mu = 0$$

΄Ομοια η ΑΕ έχει εξίσωση την $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \lambda & \mu & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu x - (\lambda - 5)\, y - 5\mu = 0$$

β) Θέλω $\quad AE' \perp AE \Leftrightarrow \vec{\delta}\,(\lambda + 5, \mu) \perp \vec{\delta}_2\,(\lambda - 5, \mu) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 25 = -\mu^2 \Leftrightarrow \lambda^2 + \mu^2 = 25$$

Είναι: $$\left.\begin{array}{r} 9\lambda^2 - 16\mu^2 = 144 \\ \lambda^2 + \mu^2 = 25 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda^2 = \dfrac{544}{25} \\ \mu^2 = \dfrac{81}{25} \end{array}$$

΄Αρα $\quad A\left(\pm \dfrac{\sqrt{544}}{5},\ \pm \dfrac{9}{5}\right)$ 4-σημεία.

1982

πανελλήνιες εξετάσεις γ΄ λυκείου

τύπος 2

ζήτημα πρώτο

α) Θεωρούμε ότι οι ακολουθίες πραγματικών αριθμών β_ν, γ_ν συγκλίνουν στον ίδιο πραγματικό αριθμό κ. Αν για την ακολουθία α_ν ισχύει $\beta_\nu \leqslant \alpha_\nu \leqslant \gamma_\nu \ \forall \nu \geqslant \nu_0$, ν' αποδειχθεί ότι η α_ν συγκλίνει επίσης στο κ.

β) Να υπολογισθεί το $\lim \alpha_\nu$ με: $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{3^\nu + 5^\nu + 7^\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ (Υπενθυμίζεται ότι ισχύει: $\sqrt[\nu]{\alpha} \to 1$, αν $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$)

απάντηση

α) Θεωρία

β) Είναι $\sqrt[\nu]{7^\nu} < \sqrt[\nu]{3^\nu + 5^\nu + 7^\nu} < \sqrt[\nu]{3 \cdot 7^\nu} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim \sqrt[\nu]{7^\nu} \leqslant \lim \sqrt[\nu]{3^\nu + 5^\nu + 7^\nu} \leqslant \lim \sqrt[\nu]{3 \cdot 7^\nu} \qquad (2)$$

Αλλά $$\lim \sqrt[\nu]{7^\nu} = 7$$

και $$\lim \sqrt[\nu]{3 \cdot 7^\nu} = \lim \sqrt[\nu]{3} \cdot \lim \sqrt[\nu]{7^\nu} = 1 \cdot 7 = 7$$

οπότε η (1) γράφεται:

$7 \leqslant \lim \sqrt{3^\nu + 5^\nu + 7^\nu} \leqslant 7$ ΄Αρα $\lim \sqrt[\nu]{3^\nu + 5^\nu + 7^\nu} = 7$

ζήτημα δεύτερο

α) Να δοθεί ο ορισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και στη συνέχεια να δοθεί ο ορισμός της γεωμετρικής σημασίας της παραγώγου στο σημείο x_0.

β) Οι συναρτήσεις f(x) και g(x) έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και παραγωγίζονται παντού σ' αυτό. Επί πλέον είναι $g(x) \neq 0 \ \forall x \in \Delta$. Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $\phi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Να αποδειχθεί ότι αν $\phi'(\rho) = 0$ τότε είναι

$$\phi(\rho) = \frac{f'(\rho)}{g'(\rho)} \quad \text{όπου} \quad g'(\rho) \neq 0 \quad \text{και} \quad \rho \in \Delta.$$

απάντηση

α) Θεωρία

β) Είναι: $\phi'(x) = \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$

και
$$\phi'(\rho) = \frac{f'(\rho)\,g(\rho) - f(\rho)\,g'(\rho)}{g^2(\rho)} \qquad (1)$$

γιατί υπάρχει η $\phi'(x)$, $\forall x \in \Delta$, άρα και για $x = \rho \in \Delta$.

Αλλά
$$\phi'(\rho) = 0 \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{f'(\rho)\,g(\rho) - f(\rho)\,g'(\rho)}{g^2(\rho)} = 0 \Rightarrow f'(\rho)\,g(\rho) - f(\rho)\,g'(\rho) =$$

$$= 0 \Rightarrow f'(\rho)\,g(\rho) = f(\rho)\,g'(\rho) \Rightarrow \frac{f'(\rho)}{g'(\rho)} = \frac{f(\rho)}{g(\rho)} \qquad (3)$$

Επειδή
$$\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x=\rho \in \Delta]{} \phi(\rho) = \frac{f(\rho)}{g(\rho)} \qquad (4)$$

Από (3) και (4) έχουμε:
$$\phi(\rho) = \frac{f'(\rho)}{g'(\rho)}$$

ζήτημα τρίτο

Η συνάρτηση g ορίζεται από το τύπο:

$$g(x) = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{x^{2\nu+1}+x^2}{x^{2\nu}+1} \qquad \text{με } \nu = 1, 2, \dots \text{ και } x \in \mathbb{R}$$

Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια στα σημεία $x = 1$ και $x = -1$

απάντηση

Ι) Η ακολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{x^{2\nu+1}+x^2}{x^{2\nu}+1}$ ορίζεται $\forall x \in \mathbb{R}$ γιατί

$$x^{2\nu}+1>0 \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \nu = 1, 2, \dots .$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) $|x|<1$ τότε $x^{2\nu+1} \to 0$ και $x^{2\nu} \to 0$ οπότε:

$$g(x) = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{x^{2\nu+1}+x^2}{x^{2\nu}+1} = \frac{o+x^2}{o+1} = x^2$$

β) $x = -1$ τότε $\alpha_\nu = \dfrac{(-1)^{2\nu+1}+(-1)^2}{(-1)^{2\nu}+1} = \dfrac{-1+1}{1+1} = 0$

οπότε $\qquad g(x) = \lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = 0$

γ) $x = 1$ τότε $\alpha_\nu = \dfrac{1^{2\nu+1}+1^2}{1^{2\nu}+1} = \dfrac{1+1}{1+1} = 1$

οπότε $\qquad g(x) = \lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = 1$

δ) $|x|>1$ τότε $\alpha_\nu = \dfrac{x^{2\nu+1}\left(1+\dfrac{1}{x^{2\nu-1}}\right)}{x^{2\nu}\left(1+\dfrac{1}{x^{2\nu}}\right)} = x \cdot \dfrac{1+\dfrac{1}{x^{2\nu-1}}}{1+\dfrac{1}{x^{2\nu}}}$

Αλλά όταν $|x|>1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|x|}<1 \Rightarrow \dfrac{1}{x^{2\nu-1}} \to 0, \dfrac{1}{x^{2\nu}} \to 0$

οπότε $$g(x) = \lim_{\nu \to +\infty} a_\nu = \lim_{\nu \to +\infty} \left(x \cdot \frac{1 + \frac{1}{x^{2\nu-1}}}{1 + \frac{1}{x^{2\nu}}} \right) =$$

$$= x \cdot \frac{1+0}{1+0} = x$$

$$\text{Άρα } g(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = -1 \\ x^2, & \text{αν } |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \\ 1, & \text{αν } x = 1 \\ x, & \text{αν } |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1 \end{cases}$$

ΙΙ) Συνέχεια στα σημεία -1 και 1.

Επειδή η συνάρτηση g ορίζεται αριστερά και δεξιά των σημείων -1 και 1 με διαφορετικούς τύπους για να βρούμε τα $\lim_{x \to -1} g(x)$ και $\lim_{x \to 1} g(x)$ θα πρέπει να υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια. Οπότε: i) $\lim_{x \to -1^-} g(x) = \lim_{x \to -1^-} x = -1$ (1)

$$\lim_{x \to -1^+} g(x) = \lim_{x \to -1^+} x^2 = (-1)^2 = 1 \quad (2)$$

Από (1), (2) $\Rightarrow \lim_{x \to -1^-} g(x) \neq \lim_{x \to -1^+} g(x)$, άρα η g είναι ασυνεχής στο σημείο $x_0 = -1$

$$\text{ii) } \lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1^2 = 1 \quad (3)$$

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} x = 1 \quad (4)$$

$$g(1) = 1 \quad (5)$$

Από (3), (4), (5) $\Rightarrow \lim_{x \to 1} g(x) = g(1)$. Άρα η g είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$

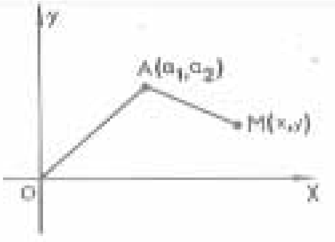
Ζήτημα τέταρτο

α) Να δοθεί ο ορισμός του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων.

β) Στο επίπεδο θεωρούμε το ορθογώνιο σύστημα αξόνων ΧΟΥ και σταθερό σημείο Α αυτού με $|\vec{OA}| = 3$. Ποια γραμμή γράφουν τα σημεία Μ (x, y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $$\vec{OM}\,(\vec{OM} - 2\,\vec{OA}) = 7$$

απάντηση

α) Θεωρία



β) Η σχέση $\vec{OM}(\vec{OM} - 2\,\vec{OA}) = 7$ γίνεται:

$$\vec{OM}\cdot\vec{OM} - 2\,\vec{OA}\cdot\vec{OM} = 7 \qquad (1)$$

Αλλά $\vec{OM}\cdot\vec{OM} = |\vec{OM}|^2$. Και αν το Μ έχει συντεταγμένες (x, y) τότε οι συντεταγμένες του $\vec{OM}$ είναι επίσης (x, y) άρα:

$$\vec{OM}\cdot\vec{OM} = (\vec{OM})^2 = x^2 + y^2 \qquad (2)$$

Αν (α_1, α_2) είναι οι συντεταγμένες του Α τότε το $\vec{OA}$ έχει συντεταγμένες (α_1, α_2) και σύμφωνα με την αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου έχουμε:

$$\vec{OA}\cdot\vec{OM} = \alpha_1 x + \alpha_2 y \qquad (3)$$

Η (1) λόγω των (2), (3) γίνεται:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\alpha_2 y = 7 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\alpha_2 y - 7 = 0$$

$$(x - \alpha_1)^2 + (y - \alpha_1)^2 = 7 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - \alpha_1)^2 + (y - \alpha_2)^2 = 16$$

Άρα το Μ γράφει περιφέρεια κύκλου με κέντρο το (α_1, α_2) και $\rho = 4$.

1983

γενικές εξετάσεις

1η Δέσμη

ζήτημα πρώτο

α) Αν (α_ν), (β_ν) ακολουθίες πραγματικών αριθμών με

$$\lim \alpha_\nu = \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim \beta_\nu = \beta \in \mathbb{R},$$

τότε να αποδειχθεί: $\lim (\alpha_\nu \beta_\nu) = \alpha\beta$

β) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (γ_ν) με:

$$\gamma_\nu = \sqrt[\nu]{\nu^{\nu+1}} \left(\sqrt{\nu^2+1} - \nu\right)$$

απάντηση

α) Θεωρία

β) Έχουμε:

$$\gamma_\nu = \sqrt[\nu]{\nu^{\nu+1}} \left(\sqrt{\nu^2+1} - \nu\right) = \sqrt[\nu]{\nu^\nu \cdot \nu} \left(\sqrt{\nu^2+1} - \nu\right) =$$

$$= \nu \sqrt[\nu]{\nu} \cdot \frac{\sqrt{(\nu^2+1)^2} - \nu^2}{\sqrt{\nu^2+1} + \nu} = \nu \sqrt[\nu]{\nu} \cdot \frac{\nu^2+1-\nu^2}{\sqrt{\nu^2+1}+\nu} =$$

$$= \frac{\nu\sqrt[\nu]{\nu}}{\nu\left(\sqrt{1+\frac{1}{\nu^2}}+1\right)} = \sqrt[\nu]{\nu} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\nu^2}}+1}$$

Άρα $\quad \lim \gamma_\nu = \lim \sqrt[\nu]{\nu} \lim \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\nu^2}}+1} = \dfrac{1}{2},$

γιατί $\lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1$

ζήτημα δεύτερο

Η συνάρτηση f, ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β], έχει παράγωγο στο ανοικτό διάστημα (α, β) και f(α) = f(β) = 0. Να αποδειχθεί: α) ότι για τη συνάρτηση F με $F(x) = \dfrac{f(x)}{x - c}$ όπου $c \notin [α, β]$, υπάρχει $c_0 \in (α, β)$ τέτοιο, ώστε $F'(c_0) = 0$. β) αν $c \notin [α, β]$, ότι υπάρχει $c_0 \in (α, β)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(c_0, f(c_0))$ της γραμμής με εξίσωση $y = f(x)$ διέρχεται από το σημείο (c, o)

απάντηση

α) 1) $F(x) = = \dfrac{f(x)}{x - c}$ | [α, β], αφού $c \notin [α, β]$

2) F(x) συνεχής στο [α, β] ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων

3) $F'(x) = \dfrac{f'(x)(x - c) - f(x)}{(x - c)^2} \quad \forall x \in (α, β)$

4) F(α) = F(β) = 0. Άρα η F στο [α, β] πληρεί τις συνθήκες του Rolle και επομένως θα πληρεί και το συμπέρασμα δηλαδή

$$\exists c_0 \in (α, β): F'(c_0) = 0 \Rightarrow \exists c_0 \in (α, β) : f'(c_0)(c_0 - c) = f(c_0) \qquad (1)$$

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο $(c_0, f(c_0))$ είναι

$$y - f(c_0) = f'(c_0)(x - c_0).$$

Για να περνάει αυτή από το (c, o) θα πρέπει

$$o - f(c_0) = f'(c_0)(c - c_0) \Rightarrow f(c_0) = f'(c_0)(c_0 - c)$$

που ισχύει από την (1).

ζήτημα τρίτο

α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει η σχέση:

$$\ln x \leqslant x - 1$$

β) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[0, +\infty)$ με

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \ln x}{1 - x} & \text{αν } 0 < x \neq 1 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \\ -1 & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι:

i) η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

ii) είναι φθίνουσα στο διάστημα (0, 1) και

iii) $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$

απάντηση

α) $\ln x \leqslant x - 1 \ \forall x \in R^*_+$.

Θεωρούμε την $f(x) = \ln x - x + 1$ |. $(0, +\infty)$

και μελετάμε αυτή ως προς τα ακρότατα.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}, \ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Άρα

x	0		1		$+\infty$
f'		+	0	−	
f		↗	max	↘	

Άρα $f(x) \leqslant f(1) \ \forall x \in R^*_+ \Rightarrow \ln x \leqslant x - 1 \ \forall x \in R^*_+$

β) i) 1) Στα διαστήματα, (0, 1) και $(1, +\infty)$ η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

2) Στο $x = 0$

$f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x \ln x}{1 - x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x - 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0 = f(o)$$

'Αρα η f συνεχής στο O.

3) Στο $x = 1$

$f(1) = -1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x \ln x}{1-x} = \lim_{x\to 1} (-x) \frac{\ln x}{x-1} = -1 = f(1)$$

'Αρα f συνεχής στο $x = 1$. Επομένως συνεχής στο $[0, +\infty)$

ii) $$f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(1-x) + x\ln x}{(1-x)^2} = \frac{\ln x + 1 - x}{(1-x)^2}$$

$\forall x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

Από το (α) ερώτημα είναι: $\ln x \leqslant x - 1 \; \forall x > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln x + 1 - x \leqslant 0 \; \forall x \in (0, 1).$$

'Αρα $f'(x) \leqslant 0 \; \forall x \in (0, 1) \Rightarrow f \downarrow$ στο $(0, 1)$.

iii) $$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x \ln x}{1-x} + 1}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x \ln x + 1 - x}{-(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x \ln x + 1 - x)'}{[-(x-1)^2]'} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + 1 - 1}{-2(x-1)} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = -\frac{1}{2}.$$

ζήτημα τέταρτο

Στο τετράεδρο ΟΑΒΓ να αποδειχθεί ότι:

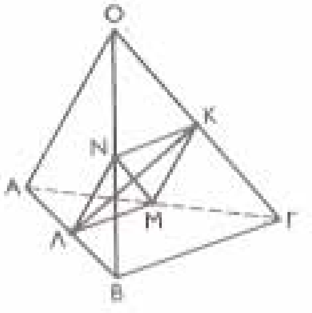
α) Αν $\vec{OA} \cdot \vec{B\Gamma} \cdot 0$ και $\vec{OB} \cdot \vec{\Gamma A} = 0$,

τότε $\vec{O\Gamma} \cdot \vec{AB} = 0$

β) Αν $\vec{OA} \cdot \vec{B\Gamma} = 0$ και d_1 είναι η απόσταση των μέσων των ευθύγραμμων τμημάτων ΟΒ, ΓΑ και d_2 είναι η απόσταση των μέσων των ευθύγραμμων τμημάτων $O\Gamma$, AB, τότε $d_1 = d_2$.

απάντηση

α)



$$\text{Έχουμε: } \vec{O\Gamma} \cdot \vec{AB} = (\vec{OB} + \vec{B\Gamma}) \cdot (\vec{AO} + \vec{OB}) =$$

$$= \vec{OB} \cdot \vec{AO} + \vec{OB} \cdot \vec{OB} + \vec{B\Gamma} \cdot \vec{AO} + \vec{B\Gamma} \cdot \vec{OB} =$$

$$= \vec{OB}\,(\vec{AO} + \vec{OB} + \vec{B\Gamma}) - \vec{OA} \cdot \vec{B\Gamma} =$$

$$= \vec{OB}\,(\vec{AO} + \vec{OB} + \vec{B\Gamma}) - 0 = (\text{γιατί } \vec{OA} \cdot \vec{B\Gamma} = 0) =$$

$$= \vec{OB} \cdot (\vec{AB} + \vec{B\Gamma}) = \vec{OB} \cdot \vec{A\Gamma} = -\,\vec{OB} \cdot \vec{\Gamma A} = 0$$

γιατί $\vec{OB} \cdot \vec{\Gamma A} = 0$ από την υπόθεση.

β) Είναι γνωστό ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο και ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς, οπότε έχουμε:

$$\vec{\Lambda M} = \frac{\vec{B\Gamma}}{2}, \quad \vec{NK} = \frac{\vec{B\Gamma}}{2}.$$

Τότε $\vec{\Lambda M} = \vec{NK}$ άρα το ΛNKM είναι παραλληλόγραμμο. Για τον ίδιο λόγο ισχύει: $\vec{N\Lambda} \parallel \vec{AO}$, $\vec{NK} \parallel \vec{B\Gamma}$.

Αλλά $\vec{OA} \cdot \vec{B\Gamma} = 0$ άρα $\vec{OA} \perp \vec{B\Gamma}$ οπότε $\vec{\Lambda N} \perp \vec{NK}$. Επομένως το παραλληλόγραμμο ΛNKM είναι ορθογώνιο, άρα τα μέτρα των διαγωνίων είναι ίσα δηλαδή

$$|\vec{MN}| = |\vec{K\Lambda}| \Leftrightarrow d_1 = d_2.$$

1983

γενικές εξετάσεις

4η Δέσμη

ζήτημα πρώτο

α) Ν' αποδειχθεί ότι: Η τετμημένη καθώς και η τεταγμένη του αθροίσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, ισούται με το άθροισμα των τετμημένων και αντίστοιχα των τεταγμένων των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $M(1, -1)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση: $5x - 9y + 12 = 0$.

απάντηση

α) Θεωρία

β) Έστω (ε΄) η ευθεία $5x - 9\psi + 12 = 0$. Επειδή

$$(\varepsilon) \parallel (\varepsilon') \Rightarrow \lambda(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon') = \frac{-5}{-9} = \frac{5}{9}.$$

Άρα η εξίσωση της (ε) είναι η:

$$\frac{\psi - (-1)}{x - 1} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{y + 1}{x - 1} = \frac{5}{9} \Rightarrow 9y + 9 = 5x - 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x - 9\psi - 14 = 0.$$

ζήτημα δεύτερο

α) Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής σε μία θέση x_0 του πεδίου ορισμού της;

β) Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις με τύπους:

(i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 - 9x + 2}{x - 2}, & \text{αν } x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ 7, & \text{αν } x = 2 \end{cases}$ στη θέση $x_0 = 2$

(ii) $g(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ στη $x_0 = 0$

απάντηση

α) Θεωρία

β) i) Έχουμε $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$ ότι:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 9x + 2}{x - 2} = \frac{(x-2)(4x-1)}{x-2} = 4x - 1$$

οπότε η συνάρτηση γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & \text{αν } x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ 7 & \text{αν } x = 2 \end{cases}$$

Είναι $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (4x - 1) = 4 \cdot 2 - 1 = 7$ και $f(2) = 7$

οπότε $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

ii) Έχουμε: $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Επειδή $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

Άρα η g είναι ασυνεχής στο $x_0 = 0$.

ζήτημα τρίτο

α) Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής: $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

(i) Να αναφέρετε τι λέγεται παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο x_0 (ii) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας της εφαπτομένης σ' ένα σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τύπο $y = f(x)$. β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στο σημείο $(1, 1)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $y = x^3$.

απάντηση

α) i) Θεωρία

ii) Θεωρία

β) Η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται σ' ένα σημείο $(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης δίνεται από τη σχέση $\psi - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Έχουμε: $y' = f'(x) = 3x^2$

Για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 1$ και $f'(1) = 3$ και άρα

$$\psi - 1 = 3(x - 1) \Leftrightarrow 3x - \psi - 2 = 0$$

ζήτημα τέταρτο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^2 - |x| - 2$
Να γίνει μελέτη και πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

απάντηση

Η συνάρτηση γίνεται $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2, & x \geq 0 \\ x^2 + x - 2, & x < 0 \end{cases}$

1) $\Delta_f = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R}$.

2) i) στο $(0, +\infty)$ συνεχής ως πολυωνυμική

ii) στο $(-\infty, 0)$ επίσης

iii) $f(0) = -2, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2 - x - 2) = -2 = f(-2)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2 + x - 2) = -2 = f(-2)$

Άρα και στο $x = 0$ συνεχής

Ώστε η f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

3) i) $f'(x) = 2x - 1, x > 0$

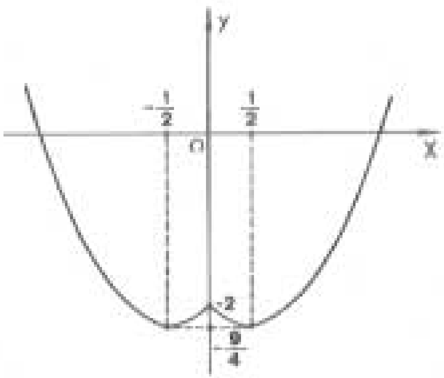
ii) $f'(x) = 2x + 1, x < 0$

$$\left.\begin{aligned} \text{iii) } f_\delta(0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - x - 2 + 2}{x - 0} = -1 \\ f_\alpha(0) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 + x - 2 + 2}{x - 0} = +1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nexists\, f'(0)$$

$$\text{Άρα} \quad f'(x) = \left|\begin{array}{ll} 2x - 1, & x > 0 \\ 2x + 1, & x > 0 \\ \nexists & x = 0 \end{array}\right.$$

4) Πίνακας

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	(τ.ε)	↗	(τ.μ.)	↘	(τ.ε)	↗	$+\infty$



1984

γενικές εξετάσεις

1η Δέσμη

ζήτημα πρώτο

α) Έστω ότι $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι τα διανύσματα (α_1, α_2), (β_1, β_2) αντίστοιχα (ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς) και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ το εσωτερικό τους γινόμενο. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$.

β) Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $x o \psi$ θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή Α το σημείο (2, 1) και έστω ότι οι ευθείες, πάνω στις οποίες βρίσκονται δύο από τα ύψη του, έχουν εξισώσεις:

$$3x + \psi - 11 = 0, \; x - \psi + 3 = 0$$

Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές του τριγώνου, και τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

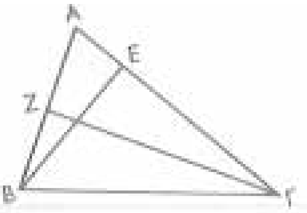
απάντηση

α) Θεωρία

β) Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του Α δεν επαληθεύουν καμμία από τις εξισώσεις των υψών $3x + y - 11 = 0$ και $x - y + 3 = 0$. Άρα τα ύψη που άγονται από τις κορυφές Β και Γ είναι πάνω στις δοσμένες ευθείες.

Έστω $BE: 3x + y - 11 = 0$

$\Gamma Z: x - y + 3 = 0$ τότε:



1. Το $\vec{\delta}(-1, 3) \parallel (BE)$

$\wedge$

$\vec{\delta_1}(x-2, y-1) \parallel$ ΑΓ όπου (x, y) τυχαίο σημείο της ΑΓ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{\delta} \perp \vec{\delta_1} \Leftrightarrow (x-2)(-1) + 3(y-1) = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 1 = 0.$

Άρα ΑΓ: $x - 3y + 1 = 0$

2. Το $\vec{\delta}\ (1, 1) \parallel$ ΓΖ

και

$\vec{\delta_1}(x-2, y-1) \parallel$ ΑΒ όπου (x, y) τυχαίο σημείο της ΑΒ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\delta} \perp \vec{\delta_1} \Leftrightarrow x - 2 + y - 1 = 0 \Rightarrow x + y = 3.$$

Άρα ΑΒ: $x + y = 3$

3) Οι συντεταγμένες του Β είναι η λύση του συστήματος

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 3 \\ 3x + y = 11 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (x = 4,\ y = -1)$$

Άρα Β $(4, -1)$

4) Οι συντεταγμένες του Γ είναι η λύση του συστήματος

$$\left.\begin{array}{l} x - 3y = -1 \\ x - y = -3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (x = -4,\ y = -1)$$

Άρα Γ $(-4, -1)$

5) Η εξίσωση της ΒΓ είναι

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y + 1 = 0$$

ζήτημα δεύτερο

α) Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ με $0 < |\alpha| < 1$, να αποδείξετε ότι $\lim \alpha^\nu = 0$.

β) Να μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία (β_ν)

με $\beta_\nu = \dfrac{\lambda^\nu + 2^{\nu+1}}{2\lambda^\nu - 3 \cdot 2^{\nu-1}}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0, -2$.

απάντηση

α) Θεωρία

β) Είναι $$\beta_\nu = \frac{2^\nu\left(\dfrac{\lambda^\nu}{2^\nu} + 2\right)}{2^\nu\left(2 \cdot \dfrac{\lambda^\nu}{2^\nu} - \dfrac{3}{2}\right)} \Leftrightarrow \beta_\nu \frac{\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^\nu + 2}{2\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^\nu - \dfrac{3}{2}}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $$\left|\frac{\lambda}{2}\right| < 1 \Rightarrow |\lambda| < 2 \Rightarrow -2 < \lambda < 2.$$

Τότε $$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^\nu \to 0 \text{ και } \lim\beta_\nu = -\frac{4}{3}$$

(ii) $\left|\dfrac{\lambda}{2}\right| = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$. Όμως $\lambda \neq -2$, και επομένως δεκτή η τιμή $\lambda = 2$. Για $\lambda = 2$ είναι $\beta_\nu = 6$ και $\lim\beta_\nu = 6$.

(iii) $\left|\dfrac{\lambda}{2}\right| > 1 \Rightarrow |\lambda| > 2 \Rightarrow \lambda \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Τότε

$$\lim\beta_\nu = \lim \frac{\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^\nu\left[1 + 2\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^\nu\right]}{\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^\nu\left[2 - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^\nu\right]} = \lim \frac{1 + 2\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^\nu}{2 - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^\nu} = \frac{1}{2}$$

γιατί $$\left(\frac{2}{\lambda}\right)^\nu \to 0$$

Ζήτημα τρίτο

α) Δίνονται τα σύνολα διανυσμάτων B_1, B_2 του χώρου $\mathbb{R}^2$ με:

$$B_1 = \{(\sigma\upsilon\nu\theta,\ \eta\mu\theta),\ (\eta\mu\theta,\ -\sigma\upsilon\nu\theta)\},$$

$$B_2 = \{(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta,\ -\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta),\ (\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta,\ \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)\}$$

με $\theta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι το καθένα από τα σύνολα B_1, B_2 είναι μία βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$ ($\forall\, \theta \in \mathbb{R}$).

β) Έστω $\theta = \frac{\pi}{4}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα (και μόνο) διάνυσμα (x, y) του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε τα διατεταγμένα ζεύγη των συντεταγμένων να είναι $(\lambda, \mu - 1)$ και $(\lambda - 1, \mu)$ ως προς τις βάσεις B_1, B_2 αντίστοιχα.

απάντηση

α) Θέτουμε $\upsilon_1 = (\sigma\upsilon\nu\theta,\ \eta\mu\theta)$, $\upsilon_2 = (\eta\mu\theta,\ -\sigma\upsilon\nu\theta)$ και

$$u_1 = (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta,\ -\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta),$$

$$u_2 = (\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta,\ \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta).$$

i) $$D_1 = |\upsilon_1\ \upsilon_2| = \begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & \eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & -\sigma\upsilon\nu\theta \end{vmatrix} =$$

$= -\sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta = -1 \neq 0$ και

$$D_2 = |u_1\ u_2| = \begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta \\ -\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta \end{vmatrix} =$$

$= (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)^2 + (\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta)^2 =$

$= \sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta - 2\eta\mu\theta\ \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta + 2\eta\mu\theta\ \sigma\upsilon\nu\theta =$

$= 1 + 1 = 2 \neq 0$

Οπότε υ_1, υ_2 και u_1, u_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

ii) Τα στοιχεία του B_1 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και είναι δύο το πλήθος δηλαδή όσο η διάσταση του $\mathbb{R}^2$. Άρα αυτά αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^2$.
Όμοια και τα στοιχεία του B_2.

β) Έστω $\theta = \frac{\pi}{4}$ τότε $B_1 = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\} \wedge$

$$B_2 = \{(0, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, 0)\}$$

Έστω $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left.\begin{array}{l} (x, y) = \lambda\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (\mu - 1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \qquad\qquad \wedge \\ (x, y) = (\lambda - 1)(0, -\sqrt{2}) + \mu(\sqrt{2}, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} (x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda + \mu - 1), \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda - \mu + 1)\right) \\ \qquad\qquad \wedge \\ (x, y) = (\mu\sqrt{2}\mu - \sqrt{2}(\lambda - 1) \end{array}\right\} \quad (1)$$

τότε θα πρέπει

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda + \mu - 1) = \mu\sqrt{2} \\ \qquad \wedge \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda - \mu + 1) = -\sqrt{2}(\lambda - 1) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda + \mu - 1 = 2\mu \\ \lambda - \mu + 1 = -2\lambda + 2 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda - \mu = 1 \\ 3\lambda - \mu = 1 \end{array} \quad (\Sigma)$$

Το (Σ) έχει μία ακριβώς λύση, αφού

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \quad \text{την} \quad \lambda = 0 \wedge \mu = -1$$

Άρα μόνο για $\lambda = 0 \wedge \mu = -1$ ισχύουν οι (1). Επομένως ένα μόνο στοιχείο του $\mathbb{R}^2$ υπάρχει που να πληρεί τις (1) και τούτο είναι το $(x, y) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Ζήτημα τέταρτο

Έστω z ο μιγαδικός αριθμός $x + \psi i$ με $\psi \neq 0$ (x, ψ πραγματικοί αριθμοί). Θέτουμε:

$$\omega = \frac{\bar{z}^2}{z-1},$$

όπου $\bar{z}$ ο συζυγής του z. Να αποδείξετε ότι ω είναι πραγματικός αριθμός, εάν και μόνο εάν το σημείο (x, ψ), ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $xo\psi$, ανήκει σε μια υπερβολή από την οποία έχουν εξαιρεθεί οι κορυφές της.

απάντηση

Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} z = x + yi \\ y \neq 0 \\ \omega = \dfrac{\bar{z}^2}{z-1} \\ \omega \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} z = x + yi \\ y \neq 0 \\ \omega = \bar{\omega} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y \neq 0 \\ \dfrac{\bar{z}^2}{z-1} = \dfrac{z^2}{\bar{z}-1} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y \neq 0 \\ \bar{z}^2(\bar{z}-1) = z^2(z-1) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y \neq 0 \\ (x-yi)^2(x-1-yi) = (x+yi)^2(x-1+yi) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y \neq 0 \\ 3x^2 - y^2 - 2x = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y \neq 0 \\ 3\left(x^2 - 2\cdot\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{9}\right) - y^2 = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y \neq 0 \\ 3\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2 - y^2 = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} y \neq 0 \\ \dfrac{\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2}{\dfrac{1}{9}} - \dfrac{y^2}{\dfrac{1}{3}} = 1. \end{array}$$

Άρα οι εικόνες των $z = x + yi$ με $y \neq 0$ διαγράφουν την υπερβολή

$$\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

εξαιρουμένων των κορυφών αφού $y \neq 0$.

1984

γενικές εξετάσεις

4η Δέσμη

ζήτημα πρώτο

α) Θεωρούμε τους πίνακες

$$\begin{bmatrix} \frac{συνx}{\sqrt{2}} & \frac{ημx}{\sqrt{2}} \\ \frac{ημx}{\sqrt{2}} & \frac{συνx}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{συνx}{\sqrt{2}} & -\frac{ημx}{\sqrt{2}} \\ -\frac{ημx}{\sqrt{2}} & \frac{συνx}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

και ονομάζουμε $H(x)$ τον πρώτο και $\Sigma(x)$ το δεύτερο.

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $H^2(x) + \Sigma^2(x) = I$, όπου I ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\Sigma^2(x) - H^2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (υποτίθεται $x \in \mathbb{R}$).

απάντηση

α) $H^2(x) = H(x) \cdot H(x) = \begin{bmatrix} \frac{ημ^2x + συν^2x}{2} & ημx\,συνx \\ ημx\,συνx & \frac{ημ^2x + συν^2x}{2} \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \etaμx\ συνx \\ ημx\ συνx & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

και $\Sigma^2(x) = \Sigma(x) \cdot \Sigma(x) =$

$$= \begin{bmatrix} \frac{συν^2x + ημ^2x}{2} & -ημx\ συνx \\ -ημx\ συνx & \frac{ημ^2x + συν^2x}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -ημx\ συνx \\ -ημx\ συνx & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

οπότε $H^2(x) + \Sigma^2(x) =$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & ημx\ συνx \\ ημx\ συνx & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -ημx\ συνx \\ -ημx\ συνx & \frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & ημx\ συνx - ημx\ συνx \\ ημx\ συνx - ημx\ συνx & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

β) $\Sigma^2(x) - H^2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -ημx\ συνx \\ -ημx\ συνx & \frac{1}{2} \end{bmatrix} -$

$$-\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & ημx\ συνx \\ ημx\ συνx & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2ημx\ συνx \\ -2ημx\ συνx & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2ημx\ συνx = 0 \Leftrightarrow ημ2x = 0 \Rightarrow 2x = κπ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{κ}{2}π,\ κ \in Z.$$

Ζήτημα δεύτερο

α) Έστω το σύστημα (Σ): $\left| \begin{array}{l} α_1x + β_1ψ = γ_1 \\ α_2x + β_2ψ = γ_2 \end{array} \right.$ με τους $α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2$ πραγματικούς αριθμούς. Να αποδείξετε ότι, αν ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} α_1 & β_1 \\ α_2 & β_2 \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος, τότε το σύστημα έχει μια μόνο λύση.

β) Να λύσετε (και να διερευνήσετε) το σύστημα:

(1): $(λ + 1)x - 2(λ - 1)ψ = 3$
(2): $x + 3λψ = 4λ + 5$, όπου $λ$ πραγματικός αριθμός.

Απάντηση

α) Θεωρία

β) Βρίσκουμε τις ορίζουσες D, D_x, $D_ψ$

$$D = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2(\lambda-1) \\ 1 & 3\lambda \end{vmatrix} = 3\lambda\,(\lambda+1) + 2(\lambda-1) =$$

$$= 3\lambda^2 + 3\lambda + 2\lambda - 2 = 3\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 3(\lambda+2)\left(\lambda - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= (\lambda+2)\,(3\lambda-1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -2\,(\lambda-1) \\ 4\lambda+5 & 3\lambda \end{vmatrix} = 9\lambda + 2(\lambda-1)\,(4\lambda+5) =$$

$$= 8\lambda^2 + 11\lambda - 10 = 8(\lambda+2)\left(\lambda - \frac{5}{8}\right) = (\lambda+2)\,(8\lambda-5)$$

$$D_\psi = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 3 \\ 1 & 4\lambda+5 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\,(4\lambda+5) - 3 =$$

$$= 4\lambda^2 + 9\lambda + 2 = 4\,(\lambda+2)\left(\lambda + \frac{1}{4}\right) = (\lambda+2)\,(4\lambda+1)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $D \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda+2)\,(3\lambda-1) \neq 0 \Leftrightarrow \left(\lambda \neq -2 \text{ και } \lambda \neq \frac{1}{3}\right)$

τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{(\lambda+2)(8\lambda-5)}{(\lambda+2)(3\lambda-1)} = \frac{8\lambda-5}{3\lambda-1}$$

$$\psi = \frac{D\psi}{D} = \frac{(\lambda+2)(4\lambda+1)}{(\lambda+2)(3\lambda-1)} = \frac{4\lambda+1}{3\lambda-1}$$

ii) $D = 0 \Leftrightarrow (\lambda+2)(3\lambda-1) = 0 \Leftrightarrow \left(\lambda = -2 \text{ ή } \lambda = \frac{1}{3}\right)$

α) Για $\lambda = -2$ έχουμε: $D = D_x = D_\psi = 0$ και επειδή ένας από τους συντελεστές των αγνώστων είναι $\neq 0$ το (Σ) είναι αόριστο.

Για $\lambda = -2$ το σύστημα γράφεται

$$\left.\begin{aligned} -x + 6\psi &= 3 \\ x - 6\psi &= -3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x - 6\psi &= -3 \\ x - 6\psi &= -3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow x - 6\psi = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 6\psi - 3.$$

Το (Σ) έχει άπειρες λύσεις τις: $(x, \psi) = (6\psi - 3, \psi)$.

β) Για $\lambda = \frac{1}{3}$ έχουμε $D_x = -\frac{49}{9} \neq 0$ και επειδή $D = 0$ το σύστημα (Σ) είναι αδύνατο.

Ζήτημα τρίτο

Έστω η πραγματική συνάρτηση ψ της πραγματικής μεταβλητής x με:

$$\psi(x) = x + \frac{4}{x}.$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο των τιμών της ψ.

β) Να εξετάσετε την ψ ως προς τη μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $(0, 2]$ και $[2, +\infty)$.

απάντηση

α) $\psi(x) = x + \frac{4}{x} \mid A = \mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Πεδίο τιμών: $B = \left\{ y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in A : y = x + \frac{4}{x} \right\} =$

$= \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in A : x^2 - yx + 4 = 0\} =$

$= \{y \in R : y^2 - 16 \geq 0 \wedge 0 - 0y + 4 \neq 0\} =$

$= \{y \in R : |y| \geq 4\} = (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$.

β) $\psi'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} \quad \forall x \in A$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f′		+	0	−	‖	−	0	+	
f		↗		↘	‖	↘		↗	

Άρα η $f \downarrow$ στο $(0, 2] \wedge \uparrow$ στο $[2, +\infty)$.

Ζήτημα τέταρτο

α) Έστω μία πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού της A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$, που περιέχει ένα ανοικτό διάστημα (α, β) με $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ και έστω x_0 ένα από τα άκρα του διαστήματος (α, β). Τι εννοούμε όταν λέμε ότι: η συνάρτηση f έχει όριο στο x_0 το $+\infty$ και τι όταν λέμε ότι η συνάρτηση f έχει όριο στο x_0 το $-\infty$;

β) Έστω η πραγματική συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής x με

$$\psi(x) = \frac{2x - 10}{5 - \sqrt{5x}}.$$

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 5}\psi(x)$.

απάντηση

α) Θεωρία

β) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Πρέπει: $\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ 5 - \sqrt{5x} \neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ 5 \neq \sqrt{5x} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ 25 \neq 5x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \neq 5 \end{array}$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι:

$$A = [0, 5) \cup (5, +\infty)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 5}(2x - 10) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 5}(5 - \sqrt{5x}) = 0$

και: $\psi(x) = \dfrac{2(x-5)}{\sqrt{5}\,(\sqrt{5} - \sqrt{x})} = \dfrac{2(x-5)}{-\sqrt{5}\,(\sqrt{x} - \sqrt{5})} =$

$$\frac{2(\sqrt{x} - \sqrt{5})\cdot(\sqrt{x} + \sqrt{5})}{-\sqrt{5}\,(\sqrt{x} - \sqrt{5})} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\,(\sqrt{x} + \sqrt{5})$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 5}\psi(x) = \lim\limits_{x\to 5} - \frac{2}{\sqrt{5}}(\sqrt{x} + \sqrt{5}) =$

$$= -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 2\sqrt{5} = -4$$

1985

γενικές εξετάσεις

1η Δέσμη

ζήτημα πρώτο

α) Έστω μια ευθεία που σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχει εξίσωση: $Ax + B\psi + \Gamma = 0$ με $|A| + |B| \neq 0$
Έστω $P(x_1, \psi_1)$ είναι ένα σημείο εκτός της ευθείας αυτής. Να αποδειχθεί ότι η απόσταση του σημείου P από την ευθεία ισούται με:

$$\frac{|Ax_1 + B\psi_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

β) Θεωρούμε δύο ευθείες που σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχουν εξίσωση $x + \mu\psi + 1 = 0$ και

$$2\mu x + 2\psi + \lambda = 0$$

αντίστοιχα, (όπου οι μ, λ είναι πραγματικοί αριθμοί). Να προσδιορίσετε για ποιά ζεύγη τιμών των λ, μ οι δύο ευθείες είναι παράλληλες και έχουν απόσταση μεταξύ τους $2\sqrt{2}$.

απάντηση

α) Θεωρία

β) Έστω ε_1: $x + \mu y + 1 = 0$

ε_2: $2\mu x + 2y + \lambda = 0$.

Από τα δεδομένα θέλουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \\ \wedge \\ d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 2\sqrt{2} \end{array}\right\} \text{θα πρέπει:} \left.\begin{array}{c} \vec{\delta}\,(-\mu, 1) \parallel \vec{\delta}_1\,(-2, 2\mu) \\ \wedge \\ d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 2\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{vmatrix} -\mu & -2 \\ 1 & 2\mu \end{vmatrix} = 0 \\ \wedge \\ d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 2\sqrt{2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \mu^2 = 1 \\ \wedge \\ d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 2\sqrt{2} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu = \pm 1 \\ \dfrac{|-2\mu + \lambda|}{\sqrt{4\mu^2 + 4}} = 2\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

όπου $(-1, 0) \in (\varepsilon_1)$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu = \pm 1 \\ |-2\mu + \lambda| = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \mu = \pm 1 \\ -2\mu + \lambda = \pm 8 \end{array} \Rightarrow (\mu = 1, \lambda = 10),$$

$(\mu = 1, \lambda = -6)$, $(\mu = -1, \lambda = 6)$, $(\mu = -1, \lambda = -10)$

Ζήτημα δεύτερο

Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3\omega = 0 \\ 4x + (3 + \lambda)\,y + 6\omega = 0 \\ 5x + 4y + (1 + \lambda)\omega = 0 \end{array}$$

α) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις

β) Να βρεθούν όλες οι λύσεις του συστήματος για την περίπτωση που το λ ισούται με τη μικρότερη από τις τιμές που βρήκατε στο ερώτημα α) του ζητήματος αυτού.

απάντηση

α) Για να έχει το σύστημα και λύσεις μη μηδενικές πρέπει η ορίζουσα D του πίνακα του συστήματος να είναι ίση με το μηδέν δηλαδή:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3+\lambda & 6 \\ 5 & 4 & 1+\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3+\lambda & 6 \\ 5 & 4 & 1+\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} (-4) & (-5) \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{matrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda-5 & -6 \\ 0 & -6 & \lambda-14 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot \begin{vmatrix} \lambda-5 & -6 \\ -6 & \lambda-14 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-5)(\lambda-14) - 36 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 19\lambda + 34 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda = 17 \text{ ή } \lambda = 2)$$

β) Για $\lambda = 2$ το σύστημα γράφεται: $\left| \begin{array}{ll} x + 2y + 3\omega = 0 & (1) \\ 4x + 5y + 6\omega = 0 & (2) \\ 5x + 4y + 3\omega = 0 & (3) \end{array} \right.$

πολ/ζοντας την (1) επί (-4) και προσθέτοντας στη (2) έχουμε

$$-3y - 6\omega = 0 \Leftrightarrow y = -2\omega \qquad (4)$$

Η (1) λόγω της (4) γίνεται $x - 4\omega + 3\omega = 0 \Leftrightarrow x = \omega$ (5)

Η (3) επαληθεύεται λόγω των (4) και (5) $\forall \omega \in \mathbb{R}$

Άρα οι άπειρες λύσεις του συστήματος για $\lambda = 2$ είναι:

$$(x, y, \omega) = (\omega, -2\omega, \omega) \quad \text{με} \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Ζήτημα τρίτο

α) Έστω μια ακολουθία (β_ν). Αν υπάρχουν δύο ακολουθίες (α_ν) και (γ_ν) με κοινό όριο, τέτοιες ώστε για κάθε $\nu > \kappa$ (κ ένας συγκεκριμένος φυσικός) να είναι $\alpha_\nu \leqslant \beta_\nu \leqslant \gamma_\nu$, τότε και η (β_ν) έχει το ίδιο όριο.

β) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\nu^2 - 2\nu + 3}$

απάντηση

α) Θεωρία

β) Για $\nu \geqslant 2$ είναι $\nu^2 \geqslant 2\nu \Leftrightarrow \nu^2 - 2\nu \geqslant 0$. Άρα

$$\sqrt[\nu]{3} \leqslant \sqrt[\nu]{\nu^2 - 2\nu + 3} < \sqrt[\nu]{\nu^2 + 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[\nu]{3} \leqslant \sqrt[\nu]{\nu^2 - 2\nu + 3} < \sqrt[\nu]{\nu^2 + 3\nu^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[\nu]{3} \leqslant \sqrt[\nu]{\nu^2 - 2\nu + 3} < \sqrt[\nu]{4\nu^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[\nu]{3} \leqslant \sqrt[\nu]{\nu^2 - 2\nu + 3} < \sqrt[\nu]{4} \cdot \sqrt[\nu]{\nu^2}.$$

Αλλά

$\lim \sqrt[\nu]{3} = 1$, $\lim \sqrt[\nu]{4} = 1$ και $\lim \sqrt[\nu]{\nu^2} = \lim \sqrt[\nu]{\nu} \cdot \lim \sqrt[\nu]{\nu} =$

$$= 1 \cdot 1 = 1.$$

Άρα $\qquad \lim \sqrt[\nu]{\nu^2 - 2\nu + 3} = 1$

ζήτημα τέταρτο

α) Έστω ότι μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα Δ και ότι στο σημείο $x_0 \in \Delta$ είναι $f'(x_0) = 0$. Αν $f''(x_0) > 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

β) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2(x - 3) + 4$, για $x \in \mathbb{R}$. Έστω x_1, x_2 είναι τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και x_3 το σημείο στο οποίο παρουσιάζει καμπή. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία του επιπέδου $(x_1, f(x_1))$ $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

απάντηση

α) Θεωρία

β) $f(x) = x^2(x - 3) + 4 = x^3 - 3x^2 + 4 \mid \Delta f = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x$ Πιθανά ακρότατα μόνο αυτά που μηδενίζουν την $f'(x)$ δηλαδή τα $x = 0{,}2$

$f''(x) = 6x - 6$ Πιθανό σημείο καμπής το $x = 1$.

x	$-\infty$		$x_1 = 0$		$x_3 = 1$		$x_2 = 2$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f''		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			(τ.μ)		(σ.κ)		(τ.ε)		

'Αρα το $(0, f(0)) = (0,4)$ τοπικό μέγιστο
το $(2, f(2)) = (2,0)$ τοπικό ελάχιστο
και το $(1, f(1)) = (1,2)$ σημείο καμπής.

Παρατηρούμε ότι: $$D = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

'Αρα τα τρία αυτά σημεία κείνται επ' ευθείας.

1985

γενικές εξετάσεις

4η Δέσμη

ζήτημα πρώτο

α) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. Να υπολογισθεί ο πίνακας $A^2 - 2A$.

β) Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και X ένας πίνακας 2 × 2. Να βρεθεί ο X

αν $\quad X + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 3\lambda & 2(\lambda^2 - 1) \end{bmatrix}$

απάντηση

α) Έχουμε $A^2 - 2A = A \cdot A - 2A =$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + (-2) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 3\, I_2.$$

β) Γνωρίζουμε ότι:

$$X + A = B \Leftrightarrow (X + A) + (-A) =$$

$$= B + (-A) \Leftrightarrow X + [A + (-A)] = B + (-A) \Leftrightarrow X + 0 =$$

$$= B + (-A) \Leftrightarrow X = B + (-A).$$

Άρα η εξίσωση

$$X + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 3\lambda & 2(\lambda^2 - 1) \end{bmatrix}$$

γράφεται: $X + \begin{bmatrix} 5 & \lambda - 5 \\ 3\lambda & \lambda^2 - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 3\lambda & 2(\lambda^2 - 1) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 3\lambda & 2(\lambda^2 - 1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -\lambda + 5 \\ -3\lambda & -\lambda^2 + \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 4 & -\lambda \\ 0 & \lambda^2 + \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

ζήτημα δεύτερο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της f και το είδος μονοτονίας σε καθένα από αυτά, καθώς και τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα. Επίσης να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f στρέφει: (α) τα κοίλα άνω (β) τα κοίλα κάτω.

Ακόμα να βρεθούν τα ενδεχόμενα σημεία καμπής.

απάντηση

Έχουμε: i) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f''(x) = 6x - 12$

και ii) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x = 1 \text{ ή } x = 3)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Είναι $f'(x) > 0, \forall x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

και $f'(x) < 0, \forall x \in (1, 3)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1)$, $(3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(1, 3)$.

Είναι $f''(x) > 0, \forall x \in (2, +\infty)$

και $f''(x) < 0, \forall x \in (-\infty, 2)$.

Άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(2, +\infty)$ και κάτω στο $(-\infty, 2)$.

Η f'' μηδενίζεται για την τιμή $x = 2$ και επί πλέον δεξιά-αριστερά αυτού αλλάζει πρόσημο. Άρα το $x_0 = 2$ είναι θέση σημείου καμπής.

Τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f, τις βρίσκουμε θέτοντας στην f'' τις ρίζες της f'. Είναι:

i) $f''(1) = -6 < 0$ άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = 1$ με $f(1) = 5$

ii) $f''(3) = 6 > 0$ άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 3$ με $f(3) = 1$.

Τα παραπάνω αποτελέσματα δίνονται συνοπτικά στον πίνακα.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
f'		+	0	−		−	0	+	
f''		−		−	0	+		+	
f		↗	τ.μ. $f(1) = 5$	↘	σ.κ. $f(2) = 3$	↘	τ.ε. $f(3) = 1$	↗	
		Στρέφει τα κοίλα κάτω				Στρέφει τα κοίλα άνω			

Ζήτημα τρίτο

α) Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A \subseteq \mathbb{R}$. Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

i) Πότε η f λέγεται άρτια

ii) Πότε η f λέγεται περιττή

iii) Πότε η f λέγεται περιοδική

iv) Πότε η f λέγεται φραγμένη άνω και

v) Πότε η f λέγεται φραγμένη κάτω.

β) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

απάντηση

α) Θεωρία

β) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$ | $A = \mathbb{R}$

Πεδίο τιμών:

$$B = \left\{ y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in \mathbb{R} : y = \frac{3x}{x^2+1} \right\} =$$

$$= \{ y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in \mathbb{R} : yx^2 - 3x + y = 0 \} =$$

$$= \{ y \in \mathbb{R} : y = 0 \text{ ή } (y \neq 0 \wedge 9 - 4y^2 \geqslant 0) \} =$$

$$= \left\{ y \in \mathbb{R} : y = 0 \text{ ή } \left(y \neq 0 \wedge |y| \leqslant \frac{3}{2} \right) \right\} =$$

$$= \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right]$$

ζήτημα τέταρτο

α) Έστω f, g συναρτήσεις που ορίζοντια στο διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και $x_0 \in \Delta$. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο xo, τότε να αποδειχθεί ότι και η $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και

είναι: $$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

β) Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^2 + x + 3$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ (0,3)

απάντηση

α) Θεωρία

β) Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράσταση της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ δίνεται από τη σχέση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Είναι: $f'(x) = 4x + 1$ και για $x = 0$ είναι $f(0) = 3$ και $f'(0) = 1$ και άρα $y - 3 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x + 3$.

1986

γενικές εξετάσεις

1η Δέσμη

ζήτημα πρώτο

α) Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ που ανήκουν στο Ε. Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

i) Πότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ λέγονται γραμμικώς εξαρτημένα;

ii) Πότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητα;

β) Να αποδείξετε ότι, αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε επίσης και τα διανύσματα:

$$\vec{u} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta} + 2\vec{\gamma},\ \vec{v} = 2\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma} \quad \text{και}$$

$$\vec{w} = -2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 2\vec{\gamma}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

απάντηση

α) i) Θεωρία

ii) Θεωρία

β) $$(\exists\ \lambda, \mu, \rho \in \mathbb{R} : \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \rho\vec{w} = 0) \Leftrightarrow$$

$$[\exists\ \lambda, \mu, \rho \in \mathbb{R}: \lambda(3\vec{\alpha} - \vec{\beta} + 2\vec{\gamma}) + \mu(2\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}) + \\ + \rho(-2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 2\vec{\gamma}) = 0] \Leftrightarrow$$

$$[\exists\ \lambda, \mu, \rho \in \mathbb{R}: (3\lambda + 2\mu - 2\rho)\vec{\alpha} + (-\lambda - 2\mu + \rho)\vec{\beta} + \\ + (2\lambda + 3\mu + 2\rho)\vec{\gamma} = 0]$$

και επειδή $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ γραμμικώς ανεξάρτητα η τελευταία ισχύει μόνο όταν

$$\left.\begin{array}{l} 3\lambda + 2\mu - 2\rho = 0 \\ -\lambda - 2\mu + \rho = 0 \\ 2\lambda + 3\mu + 2\rho = 0 \end{array}\right\} (\Sigma).$$

Το (Σ) είναι σύστημα 3×3 ομογενές με

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -15 \neq 0.$$

Άρα δέχεται σαν λύση μόνο την προφανή (0, 0, 0).

Άρα $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \rho\vec{w} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu = \rho = 0$. Άρα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του Ε.

Ζήτημα δεύτερο

α) i) Να δώσετε τον ορισμό του μέτρου ενός μιγαδικού αριθμού.

ii) Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

β) Έστω ότι: $z = (2x - 3) + (2\psi - 1)i$, $x, \psi \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (x, ψ) που είναι τέτοιο ώστε:

$$|2z - 1 + 3i| = 3$$

είναι κύκλος. Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου αυτού και την ακτίνα του.

απάντηση

α) i) Θεωρία

ii) Είναι $|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1 \cdot z_2}) = (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}) =$

$$= (z_1 \cdot \overline{z_1}) \cdot (z_2 \cdot \overline{z_2}) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \text{ και άρα}$$

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = (|z_1| \cdot |z_2|)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

β) Έστω $S_{\gamma\tau}$ η γραφική παράσταση του ζητούμενου τόπου.

Τότε $\underset{x,\, y \in \mathbb{R}}{w = (x + yi) \in S_{\gamma\tau}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} w = x + yi \\ z = (2x - 3) + (2y - 1)i \\ \qquad x, y \in \mathbb{R} \\ |2z - 1 + 3i| = 3 \end{array} \right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} w = x + yi \\ z = (2x - 3) + (2y - 1)i \\ \qquad x, y \in \mathbb{R} \\ |2(2x - 3) + 2(2y - 1)i - 1 + 3i| = 3 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} w = x + yi \\ x, y \in \mathbb{R} \\ |(4x - 7) + (4y + 1)i| = 3 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} w = x + yi \\ x, y \in \mathbb{R} \\ (4x - 7)^2 + (4y + 1)^2 = 9 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} w = x + yi \\ x, y, \in \mathbb{R} \\ \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \end{array} \right) \Leftrightarrow w \in (0, \rho).$$

Όπου $(0, \rho)$ κύκλος με κέντρο το $0\left(\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{3}{4}$. Άρα $S_{\gamma\tau} \equiv (0, \rho)$.

ζήτημα τρίτο

α) Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και έστω $x_0 \in \Delta$. Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

i) Πότε η f λέγεται συνεχής στο x_0;

ii) Πότε η f λέγεται συνεχής από δεξιά στο x_0;

iii) Πότε η f λέγεται συνεχής από αριστερά στο x_0;

β) Να προσδιορίστε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} 3\alpha e^{x+1} + x & \text{αν} \quad x \leq -1 \\ 2x^2 - \alpha x + 3\beta & \text{αν} \quad -1 < x < 0 \\ \beta\eta\mu x + \alpha\sigma\upsilon\nu x + 1 & \text{αν} \quad 0 \leq x \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

απάντηση

α) i) Θεωρία

ii) Θεωρία

iii) Θεωρία

β) Η f είναι συνεχής $\forall x \in (-\infty, -1)$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

Η f είναι συνεχής $\forall x \in (-1, 0)$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

Η f είναι συνεχής $\forall x \in (0, +\infty)$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Για να είναι συνεχής και στα σημεία $x = -1$ και $x = 0$. Πρέπει:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(1) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0).$$

Είναι: $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (3\alpha\ e^{x+1} + x) = 3\alpha\ e^{-1+1} + (-1) =$

$$= 3\alpha\ e^0 - 1 = 3\alpha - 1$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (2x^2 - \alpha x + 3\beta) =$$

$$= 2 \cdot (-1)^2 - \alpha \cdot (-1) + 3\beta = 2 + \alpha - 3\beta$$

$$f(-1) = 3\alpha\ e^{-1+1} + (-1) = 3\alpha - 1$$

Άρα $3\alpha - 1 = \alpha + 3\beta + 2 \Leftrightarrow 2\alpha - 3\beta - 3 = 0 \quad (1)$

Επίσης:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (2x^2 - \alpha x + 3\beta) = 2 \cdot 0^2 - \alpha \cdot 0 + 3\beta = 3\beta$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (\beta\eta\mu x + \alpha\sigma\upsilon\nu x + 1) = \beta\eta\mu 0 + \alpha\sigma\upsilon\nu 0 + 1 =$$

$$= 0 + \alpha + 1 = \alpha + 1$$

$$f(0) = \beta\eta\mu o + \alpha\sigma\upsilon\nu 0 + \ 1 = \alpha + 1$$

'Αρα $3\beta = \alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha - 3\beta + 1 = 0$ (2)

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $\alpha = 4$ και $\beta = \frac{5}{3}$.

Για τις τιμές $\alpha = 4$ και $\beta = \frac{5}{3}$ η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ζήτημα τέταρτο

α) Να αποδείξετε το παρακάτω θεώρημα:

'Εστω ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και ότι στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ είναι $f'(x_0) = 0$. Η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο αν:

$$\forall x \in (\alpha, x_0],\ f'(x) \geq 0 \quad \text{και} \quad \forall x \in [x_0, \beta),\ f'(x) \leq 0.$$

β) 'Εστω η συνάρτηση f με

$$f(x) = \left(\alpha - \frac{2}{3}\right)x^3 - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)x^2 - 10x + 7, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο

$$x = \frac{3}{2}.$$

Μετά για την τιμή αυτή του α να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολών της f.

απάντηση

α) Θεωρία

β) Για να παρουσιάζει η f καμπή στο $x = \frac{3}{2}$ πρέπει $f''\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ και αριστερά –, δεξιά του $\frac{3}{2}$ η f'' να αλλάζει πρόσημο.

Είναι: $f'(x) = 3\left(\alpha - \frac{2}{3}\right)x^2 - 2\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)x - 10$ και

$$f''(x) = 6\left(\alpha - \frac{2}{3}\right)x - 2\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$$

Άρα $f''\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 6\left(\alpha - \frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{2} - 2\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 9\left(\alpha - \frac{2}{3}\right) - 2\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 9\alpha - 6 - 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow 7\alpha = 7 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Για $\alpha = 1$ η αρχική συνάρτηση γράφεται:

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{3}\right)x^3 - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 - 10x + 7 =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 10x + 7$$

και $\qquad f'(x) = x^2 - 3x - 10,\ f''(x) = 2x - 3.$

Είναι: $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}.$$

Άρα η συνάρτηση f για $\alpha = 1$ παρουσιάζει καμπή στο

$$x = \frac{3}{2}.$$

Πίνακας μεταβολών της f:

Είναι: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow (x = -2$ ή $x = 5)$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

$$f''(-2) = 2\cdot(-2) - 3 = -7 < 0.$$

Η f για $x = -2$ έχει τ.μ. το $f(-2) = \frac{55}{3}$

$$f(5) = 2\cdot 5 - 3 = 7 > 0$$

Η f για $x = 5$ έχει τ.ε. το $f(5) = -\frac{233}{6}$

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
f'		+	0	−		−	0	+	
f''		−		−	0	+		+	
f		↗	τ.μ. $\frac{55}{3}$	↘	σ.κ. $-\frac{41}{4}$	↘	τ.ε. $-\frac{233}{6}$	↗	
	Η f στρέφει τα κοίλα κάτω				Η f στρέφει τα κοίλα άνω.				

1986

γενικές εξετάσεις

4η Δέσμη

ζήτημα πρώτο

Να λυθεί η εξίσωση: $\begin{vmatrix} x+3 & 2x & 3x-1 \\ -3 & 2x-6 & -x-1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$

απάντηση

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της τρίτης γραμμής έχουμε:

$$\begin{vmatrix} x+3 & 2x & 3x-1 \\ -3 & 2x-6 & -x-1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2x & 3x-1 \\ 2x-6 & -x-1 \end{vmatrix} - 5 \cdot$$

$$\begin{vmatrix} x+3 & 3x-1 \\ -3 & -x-1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x+3 & 2x \\ -3 & 2x-6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2x(-x-1) - (2x-6)(3x-1) - 5[(x+3)(-x-1) +$$

$$+ 3(3x-1)] + (x+3)(2x-6) + 3 \cdot 2x = -x^2 - x + 6.$$

Είναι: $-x^2 - x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x = 2 \quad ή \quad x = -3)$.

ζήτημα δεύτερο

Να προσδιορισθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα:

$$(\Sigma)\begin{cases}(\lambda+3)x+(\lambda-1)\psi=2\lambda+1\\(\lambda-2)x-(\lambda-1)\psi=3\lambda+7\end{cases}$$

να είναι αδύνατο.

απάντηση

Για να είναι ένα σύστημα 2×2 αδύνατο πρέπει να ισχύει μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

1) $D=0$ και $Dx \neq 0$ ή $D\psi \neq 0$

2) $D = Dx = D\psi = 0$ και όλοι οι συντελεστές των αγνώστων να είναι μηδέν ενώ ένας τουλάχιστον από τους σταθερούς όρους διάφορος του μηδενός.

Είναι: $D = \begin{vmatrix}\lambda+3 & \lambda-1\\ \lambda-2 & -(\lambda-1)\end{vmatrix} = -(\lambda+3)(\lambda-1)-$

$-(\lambda-2)(\lambda-1)=(\lambda-1)(-\lambda-3-\lambda+2)=(\lambda-1)(-2\lambda-1)$

Είναι $D=0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(-2\lambda-1)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda=1 \text{ ή } \lambda=-\frac{1}{2}\right)$$

$$Dx = \begin{vmatrix}2\lambda+1 & \lambda-1\\ 3\lambda+7 & -(\lambda-1)\end{vmatrix} = -(\lambda-1)(2\lambda+1)-$$

$$-(\lambda-1)(3\lambda+1)=(\lambda-1)(-2\lambda-1-3\lambda-7)=$$

$$=(\lambda-1)(-5\lambda-8)=-5\lambda^2-3\lambda+8$$

$$D\psi = \begin{vmatrix}\lambda+3 & 2\lambda-1\\ \lambda-2 & 3\lambda+7\end{vmatrix} = (\lambda+3)(3\lambda+7)-$$

$$-(\lambda-2)(2\lambda+1)=\lambda^2+19\lambda+23$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $\lambda = 1$ τότε $D = 0$, $Dx = 0$, $D\psi = 43 \neq 0$ οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

ii) $\lambda = -\frac{1}{2}$ τότε $D = 0$, $Dx = \frac{33}{4} \neq 0$ άρα και πάλι το σύστημα είναι αδύνατο.

Άρα για $\lambda = 1$ ή $\lambda = -\frac{1}{2}$ το (Σ) αδύνατο.

ζήτημα τρίτο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 90$, $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

απάντηση

Η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$. Επομένως πιθανά ακρότατα είναι μόνο οι ρίζες της $f'(x) = 0$.

Είναι $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$, $f''(x) = 12x + 6$ και

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 36 = 0 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ή } x = 3).$$

Άρα πιθανά ακρότατα είναι τα $x = 2$ ή -3.

i) Για $x = 2$ είναι $f''(2) = 30 > 0$ και η f παρουσιάζει στο $x_0 = 2$ τοπικό ελάχιστο με $f(2) = 46$.

ii) Για $x = -3$ είναι $f''(-3) = -30 < 0$ και η f παρουσιάζει στο $x_0 = -3$ τοπικό μέγιστο με $f(-3) = 171$.

ζήτημα τέταρτο

α) I) Έστω S το σύνολο τιμών μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν. Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα μιας τιμής $x \in S$;

II) Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Πότε η συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0;

β) Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+7x-1$, $x\in\mathbb{R}$. Αν C είναι η γραφική παράσταση της f, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο $\left(1, \frac{23}{6}\right)$. Στη συνέχεια να βρείτε σε ποιο σημείο η εφαπτομένη αυτή τέμνει τον άξονα x΄x.

απάντηση

α) I Θεωρία
II Θεωρία

β) Η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται σε ένα σημείο $(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης δίνεται από τον τύπο:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\,(x-x_0). \quad (1)$$

Έχουμε $f'(x)=x^2-5x+7$. Για $x=1$ είναι

$$f(1)=\frac{23}{6} \quad \text{και} \quad f'(1)=3$$

και η (1) γίνεται: $y-\frac{23}{6}=3(x-1)\Leftrightarrow y=3x+\frac{5}{6}$ (2)

Θέτοντας στη (2) $y=0$ βρίσκουμε το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα x΄x. Έχουμε:

$$0=3x+\frac{5}{6}\Leftrightarrow x=-\frac{5}{18}$$

και το ζητούμενο σημείο είναι το $\left(-\frac{5}{18}, 0\right)$.

1987

γενικές εξετάσεις

1η Δέσμη

ζήτημα πρώτο

Α. Ι) Έστω τα διανύσματα, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ του επιπέδου. Να αποδειχτεί ότι $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$.

ΙΙ) Να αποδειχτεί ότι, δύο μη μηδενικά διανύσματα είναι κάθετα, αν και μόνο, αν το εσωτερικό γινόμενό τους είναι μηδέν.

Β. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy δίδονται τα σημεία Α (4, 2) και Β (3, − 5). Θεωρούμε την ευθεία (ε) με εξίσωση $7x+y-23=0$. Να βρεθεί σημείο Μ της ευθείας (ε) τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΜΒ να είναι ορθογώνιο στο Μ.

απαντήσεις

Α. Θεωρία

Β. Έστω Μ (x_1, y_1) το ζητούμενο σημείο της (ε). Τότε θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} 7x_1+y_1-23=0 \\ \vec{AM}\perp\vec{BM} \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 7x_1+y_1-23=0 \\ \vec{AM}\cdot\vec{BM}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 7x_1+y_1-23=0 \\ (x_1-4)(x_1-3)+(y_1-2)(y_1+5)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} y_1=23-7x_1 \\ x_1^2-7x_1+12+y_1^2+3y_1-10=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 23 - 7x_1 \\ x_1^2 + y_1^2 - 7x_1 + 3y_1 + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = 23 - 7x_1 \\ x_1^2 + (23 - 7x_1)^2 - 7\,(23 - 7x_1) + 3y_1 + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = 23 - 7x_1 \\ x_1^2 - 7x_1 + 12 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ y_1 = 2 \end{array} \;\; \text{ή} \;\; \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ y_1 = -5 \end{array}$$

Άρα υπάρχουν δύο θέσεις του M (x_1, y_1) πάνω στην (ε) έτσι ώστε το τρίγωνο ABM να είναι ορθογώνιο στο M.

ζήτημα δεύτερο

A. Αν $\{v_1, v_2, \dots v_p\}$ είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου V, τότε να αποδειχτεί ότι κάθε διάνυσμα $v \in V$ εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδιασμός των διανυσμάτων της βάσης αυτής του V.

B. Δίνεται το υποσύνολο του

$\mathbb{R}^3$, $V = \{(\alpha, \alpha - \beta, 2\alpha + 3\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Να αποδειχτεί ότι το V είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και να βρεθεί η διάστασή του.

απαντήσεις

A. Θεωρία.

B. Το τυχαίο στοιχείο του V γράφεται:

$$(\alpha, \alpha - \beta, 2\alpha + 3\beta) = (\alpha, \alpha, 2\alpha) + (0, -\beta, 3\beta) =$$
$$= \alpha\,(1, 1, 2) + \beta\,(0, -1, 3) \quad \text{με} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ήτοι τα στοιχεία του V είναι γραμμικός συνδιασμός των στοιχείων $(1, 1, 2)$ και $(0, -1, 3)$ του $\mathbb{R}^3$.

Άρα το V διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Τα στοιχεία $(1, 1, 2)$ και $(0, -1, 3)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ αφού υπάρχει υποπίνακας του τύπου 2×2 του πίνακα $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ που έχει ορίζουσα διάφορη του μηδενός, π.χ. ο $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Ώστε: το τυχαίο στοιχείο του V γράφεται σαν γραμμικός συνδιασμός των (1, 1, 2) και (0, − 1, 3), τα (1, 1, 2), (0, − 1, 3) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του V. Άρα το {(1, 1, 2), (0, − 1, 3)} είναι μια βάση στο V με διάσταση 2.

Ζήτημα τρίτο

Α. Αν $\lim \alpha_\nu = +\infty$ ή $-\infty$ και για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ είναι $\alpha_\nu \neq 0$ τότε να αποδειχτεί ότι $\lim \dfrac{1}{\alpha_\nu} = 0$

Β. Να βρεθεί το όριο της (α_ν) με

$$\alpha_\nu = (\sqrt{7\nu^4 + 6\nu + 5} - \sqrt{7\nu^4 + 3\nu + 3}\,) \cdot \sqrt{63\nu^2 - 5\nu + 20}$$

απαντήσεις

Α. Θεωρία

Β. $\alpha_\nu = (\sqrt{7\nu^4 + 6\nu + 5} - \sqrt{7\nu^4 + 3\nu + 3}\,) \cdot \sqrt{63\nu^2 - 5\nu + 20} =$

$$= \frac{(3\nu + 2)\sqrt{63\nu^2 - 5\nu + 20}}{\sqrt{7\nu^4 + 6\nu + 5} + \sqrt{7\nu^4 + 3\nu + 3}} =$$

$$= \frac{\nu^2\left(3 + \frac{2}{\nu}\right)\sqrt{63 - \frac{5}{\nu} + \frac{20}{\nu^2}}}{\nu^2\left(\sqrt{7 + \frac{6}{\nu^3} + \frac{5}{\nu^4}} + \sqrt{7 + \frac{3}{\nu^3} + \frac{3}{\nu^4}}\right)} =$$

$$= \frac{\left(3 + \frac{2}{\nu}\right)\sqrt{63 - \frac{5}{\nu} + \frac{20}{\nu^2}}}{\left(\sqrt{7 + \frac{6}{\nu^3} + \frac{5}{\nu^4}} + \sqrt{7 + \frac{3}{\nu^3} + \frac{3}{\nu^4}}\right)} \to$$

$$\to \frac{3\sqrt{63}}{2\sqrt{7}} = \frac{9\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} = \frac{9}{2}.$$

ζήτημα τέταρτο

Α. Αν μία συνάρτηση f ορίζεται σ' ένα ανοικτό διάστημα Δ, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε να αποδειχτεί ότι $f'(x_0) = 0$.

Β. Δίδεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x$. Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Να αποδειχτεί ότι υπάρχουν τρία σημεία Α, Β, Γ ∈ C τέτοια ώστε οι εφαπτομένες της C στα σημεία Α, Β, Γ να είναι παράλληλες προς τον άξονα x΄x.

Να αποδειχτεί ότι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ βρίσκεται πάνω στον άξονα y΄y.

απαντήσεις

Α. Θεωρία.

Β. Όπως είναι γνωστό από τη θεωρία, αν σ' ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x, σ' αυτό το σημείο η παράγωγος της f μηδενίζεται.

Για να αποδείξουμε λοιπόν ότι σε τρία σημεία της C η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τρεις ακριβώς λύσεις:

Είναι $f'(x) = 4x^3 - 28x + 24 \Rightarrow 4(x^3 - 7x + 6) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^3 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow x^3 - 7x + 7 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^3 - 1) - 7(x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1 - 7) = 0 \Rightarrow$$

$$(x - 1)(x^2 + x - 6) = 0 \Rightarrow x = 1 \quad ή \quad x = -3 \quad ή \quad x = 2.$$

Άρα $$f'(1) = f'(-3) = f'(2) = 0$$

και επομένως υπάρχουν τρία σημεία της C τα

$$A(1, f(1)), \quad B(-3, f(3)) \quad και \quad \Gamma(2, f(2))$$

στα οποία οι εφαπτομένες της C είναι παράλληλες προς τον άξονα x΄x

Έστω τώρα Μ το μέσο της ΒΓ και G το κ.β. του τριγώνου ΑΒΓ τότε:

$$M\left(\frac{-3+2}{2}, \frac{f(-3)+f(2)}{2}\right) = M\left(-\frac{1}{2}, \frac{f(-3)+f(2)}{2}\right)$$

και

$$\lambda = (A, M, G) = 2$$

Άρα $\quad G\,(x_0, y_0) : x_0 = \dfrac{1 + 2\,(-1/2)}{1+2} = 0$

Άρα το $G(0, y_0)$ βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$.

1987

γενικές εξετάσεις

4η Δέσμη

ζήτημα πρώτο

Α. Έστω συνάρτηση f: Α → Β, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$ με $A \neq \varnothing$. Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:
I) Πότε η f λέγεται γνησίως αύξουσα.
II) Πότε η f λέγεται γνησίως φθίνουσα.
III) Πότε η f λέγεται αύξουσα.
IV) Πότε η f λέγεται φθίνουσα.
V) Πότε η f λέγεται «συνάρτηση επί».

Β. I) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α (4, − 3) και Β (− 2,5).

II) Να βρείτε το λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) έτσι ώστε η παραπάνω ευθεία να διέρχεται από το σημείο Γ (− 3, 2λ − 1).

απαντήσεις

Α. Θεωρία.

Β. I) Η εξίσωση ευθείας που περνάει από τα Α (4, − 3) και Β (− 2, 5) είναι η

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \Rightarrow -8x - 6y + 14 = 0 \Rightarrow 4x + 3y - 7 = 0$$

II) Η ευθεία $4x + 3y - 7 = 0$ διέρχεται από το Γ (− 3, 2λ − 1), άρα θα είναι:

$$4(-3)+3(2\lambda-1)-7=0 \Rightarrow -12+6\lambda-3-7=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda = 22 \Rightarrow \lambda = \frac{11}{3}$$

ζήτημα δεύτερο

Α. Έστω $\bar{x}$ η μέση τιμή της μεταβλητής X ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα. Να αποδειχτεί ότι η μέση τιμή $\bar{y}$ της μεταβλητής $\Psi = \alpha X + \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ είναι $\bar{y} = \alpha\bar{x} + \beta$.

Β. Να αποδειχτεί ότι: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta+1 & 1 \\ \beta & \alpha+1 & 1 \\ \alpha+\beta & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

απαντήσεις

Α. Θεωρία.

Β. Έστω $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta+1 & 1 \\ \beta & \alpha+1 & 1 \\ \alpha+\beta & 1 & 1 \end{vmatrix}$ τότε

$$D = \begin{vmatrix} \alpha+\beta+2 & \beta+1 & 1 \\ \alpha+\beta+2 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha+\beta+2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+2)\begin{vmatrix} 1 & \beta+1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha+\beta+2)\cdot 0 = 0.$$

ζήτημα τρίτο

Να βρεθούν οι τιμές των λ και μ για τις οποίες τα συστήματα

$$\left.\begin{aligned} (2\lambda-1)x + 10\mu y &= 3 \\ 2x + 4y &= 5 \end{aligned}\right\} (\Sigma_1) \text{ και } \left.\begin{aligned} (\lambda-2)x - (\mu+1)y &= 7 \\ 3x - 6y &= 5 \end{aligned}\right\} (\Sigma_2)$$

είναι συγχρόνως αδύνατα.

απαντήσεις

Για καθένα από τα συστήματα έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 2\lambda - 1 & 10\mu \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8\lambda - 20\mu - 4,\ D_x = \begin{vmatrix} 3 & 10\mu \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 50\mu,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2\lambda - 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 10\lambda - 11 \qquad \text{και}$$

$$D' = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -(\mu + 1) \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6\lambda + 3\mu + 15,$$

$$D'_x = \begin{vmatrix} 7 & -(\mu + 1) \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 5\mu - 37,\ D'_y = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5\lambda - 31$$

Επειδή σε καθένα από τα συστήματα ένας τουλάχιστον από τους 4 συντελεστές των αγνώστων είναι διάφορος του μηδενός, τα συστήματα είναι συγχρόνως αδύνατα μόνον όταν:

$$\left.\begin{array}{l} D = D' = 0 \\ |D_x| + |D_y| > 0 \\ |D'_x| + |D'_y| > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 8\lambda - 20\mu = 4 \\ -6\lambda + 3\mu = -15 \\ |D_x| + |D_y| > 0 \\ |D'_x| + |D'_y| > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2\lambda - 5\mu = 1 \\ -2\lambda + \mu = -5 \\ |D_x| + |D_y| > 0 \\ |D'_x| + |D'_y| > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mu = 1 \\ \lambda = 3 \end{array}$$

Άρα οι ζητούμενες τιμές είναι $\lambda = 3$ και $\mu = 1$, αφού πληρούν τις $|D_x| + |D_y| > 0$
$|D'_x| + |D'_y| > 0$

Ζήτημα τέταρτο

Α. Να αποδειχτεί ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Β. Έστω C η γραφική παράσταση της f με

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 9x - 12.$$

Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το σημείο $A(2, -10)$ ν' ανήκει στη C και η εφαπτομένη της C στο Α να έχει συντελεστή διευθύνσεως τον αριθμό -3.

απαντήσεις

Α. Θεωρία.

Β. Έχουμε $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + 9$ και

$$f'(2) = 12\alpha + 4\beta + 9$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = -10 \\ f'(2) = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8\alpha + 4\beta + 6 = -10 \\ 12\alpha + 4\beta + 9 = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 8\alpha + 4\beta = -16 \\ 12\alpha + 4\beta = -12 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\alpha + \beta = -14 \\ 3\alpha + \beta = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = -6 \end{array}$$

1988

γενικές εξετάσεις

1η Δέσμη

ζήτημα πρώτο

Α. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned}(\lambda+1)x+y&=\lambda+1\\ x+(\lambda+1)y&=1\\ x+y&=2\lambda+1\end{aligned}$$

Β. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$A=\left\{\frac{4\kappa+1}{5-4\lambda}:\kappa,\lambda\in\mathbb{Z}\right\}$$

εφοδιασμένο με τη συνήθη πράξη του πολλαπλασιασμού κλασμάτων στο $\mathbb{R}$ είναι πολλαπλασιαστική ομάδα.

απαντήσεις

Α. Το $\quad (\Sigma)$: $\begin{aligned}(\lambda+1)x+y&=\lambda+1\\ x+(\lambda+1)y&=1\\ x+y&=2\lambda+1\end{aligned}$

είναι σύστημα του τύπου 3×2.

Υπολογίζουμε πρώτα την ορίζουσα D του επαυξημένου πίνακα.

$$D=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 1 & \lambda+1\\ 1 & \lambda+1 & 1\\ 1 & 1 & 2\lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & -\lambda & \lambda\\ 1 & \lambda+1 & 1\\ 0 & -\lambda & 2\lambda\end{vmatrix}=$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & \lambda+1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 (2\lambda + 3) + 2\lambda^2 - \lambda^2 = \lambda^2(2\lambda + 3) + \lambda^2 =$$

$$= \lambda^2(2\lambda + 4) = 2\lambda^2(\lambda + 2)$$

1) $D \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0 \wedge \lambda \neq -2$ Το (Σ) αδύνατο.

2) $D = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = -2$

i) $\lambda = 0$ Το $(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{matrix} x + y = 1 \\ x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{matrix} \Leftrightarrow x + y = 1 \Leftrightarrow \begin{matrix} y = 1 - x \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix}$

Άπειρες λύσεις της μορφής $(x, 1 - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) $\lambda = -2$ Το $(\Sigma) \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -x + y = -1 \\ x - y = 1 \\ x + y = -3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x - y = 1 \\ x - y = 1 \\ x + y = -3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{matrix} x - y = 1 \\ x + y = -3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ y = -2 \end{matrix}$$

Μία ακριβώς λύση τη $(-1, -2)$.

B. Αρκεί να δείξουμε ότι το A είναι υποομάδα της πολλαπλασιαστικής ομάδας $(\mathbb{R}^*, \cdot)$

Παρατηρούμε ότι:

- $A \subseteq \mathbb{R}^*$ αφού το $0 \notin A$.
- $A \neq \varnothing$ αφού για $\kappa = 1$ και $\lambda = 0$ το $1 \in A$.
- $\forall$, $x, y \in A \Rightarrow xy \in A$. Πράγματι:

$$xy = \frac{4\kappa + 1}{5 - 4\lambda} \cdot \frac{4\kappa' + 1}{5 - 4\lambda'} \Rightarrow$$

με $\kappa, \lambda, \kappa', \lambda' \in Z$

$$\Rightarrow xy = \frac{16\kappa\kappa' + 4\kappa + 4\kappa' + 1}{25 - 20\lambda' - 20\lambda + 16\lambda\lambda'} =$$

$$= \frac{4(4\kappa\kappa' + \kappa + \kappa') + 1}{5 - 4(-5 + 5\lambda + 5\lambda' - 4\lambda\lambda')} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow xy = \dfrac{4\rho + 1}{5 - 4\tau} \\ \rho = (4\kappa\kappa' + \kappa + \kappa') \in Z \quad \text{και} \\ \tau = (5\lambda + 5\lambda' - 4\lambda\lambda' - 5) \in Z \end{array}\right\} \Rightarrow yx \in A$$

• $\forall x \in A \Rightarrow \dfrac{1}{x} \in A$. Πράγματι

$$\frac{1}{x} = \frac{5 - 4\lambda}{4\kappa + 1} = \frac{4 + 1 - 4\lambda}{5 - 4 + 4\kappa} = \frac{4(-\lambda + 1) + 1}{5 - 4(1 - \kappa)} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{4\sigma + 1}{5 - 4\sigma'} \\ \text{με} \quad \sigma = (1 - \lambda) \in Z \\ \qquad \sigma' = (1 - \kappa) \in Z \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x} \in A$$

Άρα το A υποομάδα της πολλαπλαστικής ομάδας $(\mathbb{R}^*)$.

ζήτημα δεύτερο

Α. Να αποδείξετε ότι κάθε ακολουθία αύξουσα και φραγμένη άνω είναι συγκλίνουσα.

Β. Να βρείτε το όριο της (α_ν) με $\alpha_1 = 1$ και

$$\alpha_{\nu+1} = \sqrt{4\alpha_\nu + 5} \ \forall \nu \in N^*.$$

απαντήσεις

Α. Θεωρία.

Β. i)

$$\begin{array}{c|l} & \alpha_1 = 1 > 0 \\ Y & \alpha_\nu > 0 \\ \hline \Sigma & \alpha_{\nu+1} > 0 \end{array}$$

Πράγματι: $\alpha_\nu > 0 \Rightarrow 4\alpha_\nu + 5 > \Rightarrow \sqrt{4\alpha_\nu + 5} > 0 \Rightarrow \alpha_{\nu+1} > 0$

Άρα $\alpha_\nu > 0 \ \forall \nu \in N^*$ και επομένως όλοι οι όροι της α_ν ορίζονται.

ii)

$$\begin{array}{c|l} & \alpha_1 = 1 < \alpha_2 = \sqrt{9} = 3 \\ Y & \alpha_\nu < \alpha_{\nu+1} \\ \hline \Sigma & \alpha_{\nu+1} < \alpha_{\nu+2} \end{array}$$

Πράγματι: $a_\nu < a_{\nu+1} \Rightarrow 4a_\nu < 4a_{\nu+1} \Rightarrow 4a_\nu + 5 < 4a_{\nu+1} + 5 \Rightarrow$

$$\sqrt{4a_\nu + 5} < \sqrt{4a_{\nu+1} + 5} \Rightarrow a_{\nu+1} < a_{\nu+2}$$

Άρα $a_\nu \uparrow$ στο N^*

iii) $a_\nu < a_{\nu+1} \Rightarrow a_\nu < \sqrt{4a_\nu + 5} \Rightarrow a_\nu^2 - 4a_\nu - 5 < 0 \Rightarrow$

$$-1 < a_\nu < 5 \Rightarrow 0 < a_\nu < 5.$$

Άρα a_ν φραγμένη.

iv) Η ακολουθία (a_ν) ως μονότονη και φραγμένη συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

Έστω $\lim a_\nu = x \Rightarrow \lim a_{\nu+1} = x.$

Άρα $\lim a_{\nu+1} = \lim \sqrt{4a_\nu + 5} = \sqrt{4\lim a_\nu + 5} \Rightarrow$

$$x = \sqrt{4x + 5} \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = -1,5 \Rightarrow x = 5.$$

Άρα $\lim a_\nu = 5.$

ζήτημα τρίτο

Α. Θεωρούμε συνάρτηση g που ορίζεται σ' ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν η g είναι παραγωγίσιμη στη σημείο $x_0 \in \Delta$ και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{1}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και είναι

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$

I) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης.

II) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C της συνάρτησης f, τον άξονα οx και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 2$, $x = 5$.

απαντήσεις

Α. Θεωρία.

Β.

I) • Η f ορίζεται στο $A = \mathbb{R} - \{-1\}$

- $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ $\forall x \in A$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -2$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x > 0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x(x+2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

Άρα

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
f		↗		↘	‖	↘		↗	
			τ.μ. $f(-2) = -2$				τ.ε $f(0) = 2$		

- η f με $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x+1}$ | $A = \mathbb{R} - \{-1\}$ είναι συνεχής στο A ς άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Άρα η f είναι : γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -2]$ και $[0, +\infty)$
: γνησίως φθίνουσα στα $[-2, -1)$ και $(-1, 0]$
και
για : $x = -2$ έχει τοπικό μέγιστο το $f(-2) = -2$
: $x = 0$ έχει τοπικό ελάχιστο το $f(o) = 2$

II) Η συνάρτηση f με $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x+1}$ | [2,5]. είναι συνεχής και $f(x) > 0$ $\forall x \in [2,5]$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδό δίδεται από τον τύπο:

$$E = \int_2^5 f(x)\,dx = \int_2^5 \left(x + 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx =$$

$$= \int_2^5 x dx + \int_2^5 1 dx + \int_2^5 \frac{1}{x+1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}[x^2]_2^5 + [x]_2^5 + [\ln(x+1)]_2^5 =$$

$$= \frac{1}{2}(25 - 4) + (5 - 2) + (\ln 6 - \ln 3) = \frac{21}{2} + 3 + \ln\frac{6}{3} =$$

$$= \frac{27}{2} + \ln 2.$$

ζήτημα τέταρτο

Α. Ι) Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής.

ΙΙ) Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$ και η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή έχουν ένα διπλό κοινό σημείο αν και μόνον αν $p = 2\lambda\kappa$.

Β. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$.

Ι) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $3x + y + 3 = 0$ (η).

ΙΙ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής τις οποίες φέρνουμε από το σημείο $(-2, 1)$.

απαντήσεις

Α. Θεωρία.

Β. Ι) Για την παραβολή $y^2 = 4x$ έχουμε $p = 2$ και επομένως η εφαπτομένη αυτής στο τυχαίο σημείο της (x_0, y_0) θα δίδεται από την εξίσωση:

$$yy_0 = 2(x + x_0) \Rightarrow 2x - y_0y + 2x_0 = 0 \quad (\varepsilon)$$

Θέλουμε: $(\varepsilon) \perp \eta \Rightarrow \vec{\alpha}\,(2, -y_0) \perp \vec{\beta}\,(3, 1) \Rightarrow$

$$6 - y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 6$$

Είναι και $\quad y_0^2 = 4x_0 \Rightarrow x_0 = 9$

Άρα $(x_0, y_0) = (9, 6)$ και η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η

$$x - 3y + 9 = 0$$

ΙΙ) Από το σημείο $(-2, 1)$ διέρχονται οι ευθείες

$x = -2$ ή $y - 1 = \lambda(x + 2) \Rightarrow x = -2$ ή $y = \lambda x + 2\lambda + 1$.

α) Η $x = -2$ εφάπτεται της $y^2 = 4x$ μόνο αν το σύστημα:

$\begin{matrix} y^2 = 4x \\ x = -2 \end{matrix}$ έχει διπλή λύση. Τούτο όμως είναι αδύνατο.

Άρα η $x = -2$ δεν εφάπτεται της παραβολής.

β) Η $y = \lambda x + 2\lambda + 1$ εφάπτεται της παραβολής $y^2 = 4x$ μόνον όταν $\quad 2 = 2\lambda(2\lambda + 1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm 3}{4} = -1,\ 1/2$$

'Ωστε από το σημείο $(-2, 1)$ άγονται δύο εφαπτομένες της παραβολής $y^2 = 4x$ που δίδονται από τον τύπο

$$y = \lambda x + 2\lambda + 1$$

για $\lambda = -1$ και $\lambda = \frac{1}{2}$.

'Αρα για $\lambda = -1$ η εφαπτομένη είναι η $y = -x - 1$ και για $\lambda = \frac{1}{2}$ η εφαπτομένη είναι η $y = \frac{1}{2}x + 2$.

1988

γενικές εξετάσεις

4η Δέσμη

ζήτημα πρώτο

Α. Θεωρούμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y = \gamma_3 \end{array}\right\}$$

Να αποδειχτεί ότι αν το σύστημα είναι συμβιβαστό τότε θα ισχύει:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

Β. Να λυθεί το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ -3x + 2y + 6z = 0 \end{array}\right\} (\Sigma)$$

απαντήσεις

Α. Θεωρία.

Β. Το (Σ) είναι σύστημα γραμμικό-ομογενές του τύπου 3×3 με

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -18 - 2 + 24 + 6 + 8 - 18 = 0$$

Άρα έχει και άλλες λύσεις πέρα από τη προφανή (0, 0, 0). Εύρεση των λοιπών λύσεων:

Ο Επαυξημένος Πίνακας του (Σ) είναι

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & : & 0 \\ 2 & -3 & 1 & : & 0 \\ -3 & 2 & 6 & : & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & : & 0 \\ 0 & 1 & -3 & : & 0 \\ 0 & -4 & 12 & : & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & : & 0 \\ 0 & 1 & -3 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & : & 0 \\ 0 & 1 & -3 & : & 0 \end{bmatrix}$$

Ώστε: $$(\Sigma) \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 0 \\ y - 3z &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} x &= 4z \\ y &= 3z \\ z &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Άρα το (Σ) έχει άπειρες λύσεις τις $(4z, 3z, z)$ με $z \in \mathbb{R}$.

ζήτημα δεύτερο

Α. Έστω S_x η τυπική απόκλιση της μεταβλητής X ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα. Να αποδειχτεί ότι η τυπική απόκλιση S_y της μεταβλητής

$$\Psi = \alpha X + \beta,\ \alpha, \beta, \in \mathbb{R} \quad \text{είναι} \quad S_y = |\alpha|\, S_x.$$

Β. Έστω $A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ και I, O ο μοναδιαίος και ο μηδενικός πίνακας 2×2 αντιστοίχως. Να προσδιορίσετε το $x \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι $A^2 + 6A - 3I = O$.

απαντήσεις

Α. Θεωρία

Β. Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} A^2 = A \cdot A &= \begin{bmatrix} x & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + 8 & 2x - 2 \\ 4x - 4 & 9 \end{bmatrix} \\ 6A &= \begin{bmatrix} 6x & 12 \\ 24 & -6 \end{bmatrix} \\ -3I &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3(x-1)(x-2/3)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(x-\frac{2}{3}\right) = 1$$

'Αρα $f'_{\alpha}(1) = f'_{\delta}(1) = 1.$

Επομένως υπάρχει η $f'(1)$ και μάλιστα είναι $f'(1) = 1$.

Β. Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 1}{x}$ ορισμένη στο $[1, 2]$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

'Αρα υπάρχει το $I = \int_1^2 \dfrac{x^3 - 5x^2 + 1}{x}dx$ και μάλιστα είναι.

$$I = \int_1^2\left(x^2 - 5x + \frac{1}{x}\right)dx = \int_1^2 x^2dx - 5\int_1^2 xdx + \int_1^2 \frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{1}{3}[x^3]_1^2 - \frac{5}{2}[x^2]_1^2 + [\ln x]_1^2 = \frac{1}{3}(8-1) - \frac{5}{2}(4-1) +$$

$$+ (\ln 2 - \ln 1) = \frac{7}{3} - \frac{15}{2} + \ln 2 = -\frac{31}{6} + \ln 2.$$

ζήτημα τέταρτο

Α. 'Εστω $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu > 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = x^{\nu}$. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \nu x^{\nu-1}\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Β. 'Εστω συνάρτηση f με $f(x) = 3x^3 - \alpha x^2 + \beta x - 3$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η f έχει τοπικά ακρότατα στο $x_1 = 1$ και $x_2 = -\dfrac{5}{9}$ τότε να βρεθούν οι αριθμοί α, β.

απαντήσεις

Α. Θεωρία.

Β. Παρατηρούμε ότι:

- Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R}$.
- Υπάρχει η $f'(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ και μάλιστα

$$f'(x) = 9x^2 - 2\alpha x + \beta.$$

• Πιθανά ακρότατα είναι μόνο οι ρίζες της $f'(x) = 0$ αν υπάρχουν.

• Αν η $f'(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις $x = \rho_1$, $x = \rho_2$, τότε η f στο $x = \rho_1$ και $x = \rho_2$ θα έχει τοπικά ακρότατα αφού η $f'(x)$ θα αλλάξει πρόσημο εκατέρωθεν των ρ_1, ρ_2.

Άρα η f στο $x_1 = 1$ και $x_2 = -\frac{5}{9}$ έχει τοπικά ακρότατα μόνου όταν τα x_1, x_2 είναι ρίζες της $f'(x) = 0$ δηλαδή μόνο όταν

$$\left.\begin{array}{c} x_1 + x_2 = \dfrac{2\alpha}{9} \\ \wedge \\ x_1 x_2 = \dfrac{\beta}{9} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \dfrac{2\alpha}{9} = \dfrac{4}{9} \\ \\ \dfrac{\beta}{9} = -\dfrac{5}{9} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \alpha = 2 \\ \\ \beta = -5 \end{array}$$

1989

γενικές εξετάσεις

1η Δέσμη

ζήτημα πρώτο

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x+\lambda(y+z)=0 \\ -2y+z=\lambda x \\ \lambda x+y=-z \end{cases}$ (Σ)

απάντηση

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{aligned} x+\lambda y+\lambda z&=0 \\ -\lambda x-2y+z&=0 \\ \lambda x+y+z&=0 \end{aligned}$$

Το σύστημα (Σ) είναι του τύπου 3×3 ομογενές

Υπολογίζουμε τα D των αγνώστων του.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ -\lambda & -2 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}+\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=-3+2\lambda^2+\lambda^2=-3+3\lambda^2=3(\lambda^2-1)=3(\lambda-1)(\lambda+1)$$

i) $D\neq 0 \Rightarrow \lambda\neq\pm1$. Το σύστημα έχει μόνο τη προφανή λύση $(x, y, z)=(0, 0, 0)$

ii) $D=0 \Rightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=-1$

● $\lambda=1$: $(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{aligned} x+y+z&=0 \\ -x-2y+z&=0 \\ x+y+z&=0 \end{aligned} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x+y+z&=0 \\ -x-2y+z&=0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} x&=-3z \\ y&=2z \\ z&\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Άπειρες λύσεις της μορφής $(-3z,\ 2z,\ z)$ με $z \in \mathbb{R}$.

- $\lambda = -1$: $(\Sigma) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} x = 3z \\ y = 2z \\ z \in \mathbb{R} \end{array}.$$

Άπειρες λύσεις της μορφής $(3z,\ 2z,\ z)$ με $z \in \mathbb{R}$.

ζήτημα δεύτερο

i) Να αποδειχτεί ότι κάθε ν-οστή ρίζα της μονάδας είναι της μορφής: $\xi_k = \text{συν}\dfrac{2k\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\dfrac{2k\pi}{\nu},\ k \in \mathbb{Z}$.

ii) Να λυθεί η εξίσωση στο σύνολο C των μιγαδικών αριθμών

$$z^6 + 2z^5 + 2z^4 + 2z^3 + z^2 + (z+1)^2 = 0 \ \ (E).$$

απάντηση

i) Θεωρία

ii) (E) $\Leftrightarrow z^6 + 2z^5 + 2z^4 + 2z^3 + z^2 + z^2 + 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z^6 + 2z^5 + 2z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^6 - 1 + 2z^5 + 2z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z-1)(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) +$$

$$+ 2\cdot(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)(z - 1 + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)\ (z+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z^6 - 1}{z - 1}\cdot(z+1) = 0 \text{ με } z \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{z \neq 1}{(z^6 - 1)(z+1) = 0} \Leftrightarrow \underset{z \neq 1}{z^6 = 1} \text{ ή } z = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \text{συν}\frac{2k\pi}{6} + i\text{ημ}\frac{2k\pi}{6} \text{ με } k = 1,2,3,4,5$$

$$\text{ή } z = -1$$

$$\Leftrightarrow z = \text{συν}\frac{k\pi}{3} + i\,\text{ημ}\frac{k\pi}{3} \quad \text{με } k = 1,2,3,4,5$$
$$\text{ή } z = -1$$

Ώστε η (Ε) έχει ρίζες τις έκτες ρίζες της μονάδας εκτη της $z=1$ και μάλιστα τη $z=-1$ διπλή.

ζήτημα τρίτο

I) Να αποδειχτεί ότι αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f'(x) = 0$, τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο Δ.

II) Έστω f,g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

i) είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο Δ.

ii) $f'' = g''$ και

iii) $0 \in \Delta$ και $f(0) = g(0)$.

Να δειχθεί ότι:

α) Για κάθε $x \in \Delta$, $f(x) - g(x) = cx$ όπου $c \in \mathbb{R}$.

β) Αν η $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες ρ_1, ρ_2, τότε η $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο κλειστό διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

απάντηση

I) Θεωρία

II) α) $f'' = g'' \Leftrightarrow \forall x \in \Delta\ f''(x) = g''(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \Delta\ (f'(x) - g'(x))' = 0 \overset{(I)}{\Leftrightarrow}$$

$$\forall x \in \Delta\ f'(x) - g'(x) = c \Leftrightarrow \forall x \in \Delta\ (f-g)'(x) = (cx)' \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \Delta\ (f-g)'(x) - (cx)' = 0 \overset{(I)}{\Leftrightarrow} \forall x \in \Delta\ (f-g)(x) - cx = c_1 \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \Delta\ f(x) - g(x) - cx = c_1 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = cx + c_1\ \forall x \in \Delta \quad (1)$$

Η (1) για $x = 0$ γίνεται: $f(0) - g(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = 0$

Άρα $f(x) - g(x) = cx\ \ \forall x \in \Delta$.

β) Έχουμε: f,g συνεχείς στους Δ ως παραγωγίσιμες στο Δ $g(x) = f(x) - cx \ |[\rho_1, \rho_2] \subseteq \Delta$, αφού $\rho_1, \rho_2 \in \Delta$ και Δ διάστημα. g – συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως άθροισμα συνεχών αναρτήσεων $g(\rho_1) = -c\rho_1$

$g(\rho_2) = -c\rho_2$

$g(\rho_1)g(\rho_2) = c^2\rho_1\rho_2 \leq 0$

1) αν: $g(\rho_1)g(\rho_2) < 0$ τότε σύμφωνα με το Θ. του Bolzano υπάρχει $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$: $g(\rho) = 0$

2) αν: $g(\rho_1)g(\rho_2) = 0 \Rightarrow g(\rho_1) = 0$ ή $g(\rho_2) = 0$

Άρα υπάρχει πάντα: $\rho \in [\rho_1, \rho_2]$: $g(\rho) = 0$

ζήτημα τέταρτο

Δίδεται η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ και πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $x_o = \frac{\pi}{8}$.

β) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραπάνω εφαπτομένη, τη γραφική παράσταση της f και από τους θετικούς ημιάξονες ox, oy.

απάντηση

α) • $f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \eta\mu\left[\frac{\pi}{2} - (-2x)\right] = \sigma\upsilon\nu(-2x) =$

$= \sigma\upsilon\nu 2x \Big| \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

• Υπάρχει η $f'(x)$ $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ και μάλιστα

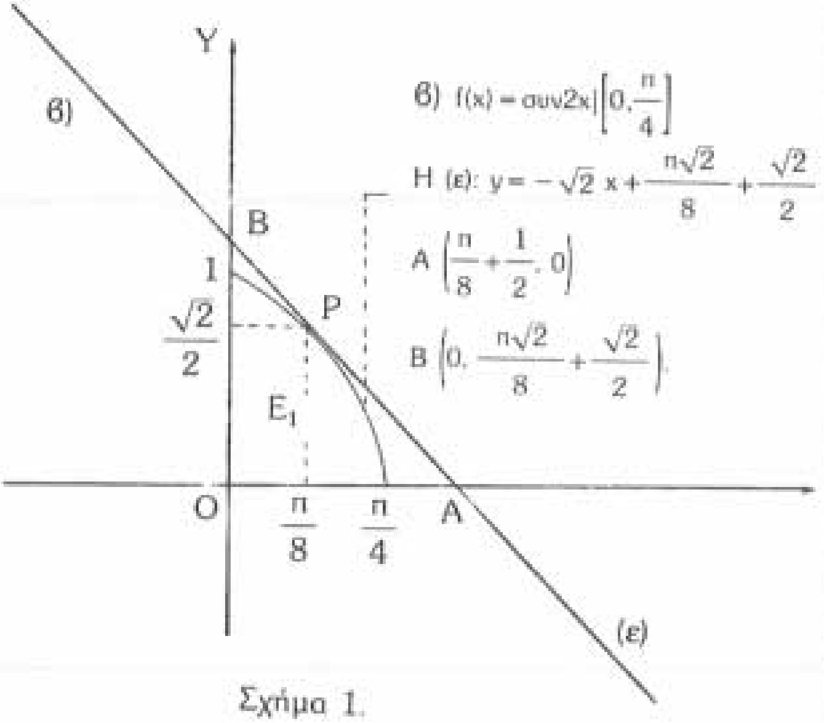
$f'(x) = -2\eta\mu 2x$

Άρα η εφαπτομένη στο $x_o = \frac{\pi}{8}$ θα δίνεται από το τύπο:

$$y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o) \Rightarrow y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}\,x + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\sqrt{2}\,x + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Σχήμα 1.

$f(x)=συν2x|[0,π/4]$

$f'(x)=-2ημ2x$

$f''(x)=-4συν2x \quad \forall x\in\left[0,\frac{π}{4}\right]$.

Είναι όμως $f''(x)<0 \quad \forall x\in\left[0,\frac{π}{4}\right]$. Άρα η f στο $\left[0,\frac{π}{4}\right]$ στρέφει τα κοίλα της προς τα κάτω και η (ε) βρίσκεται πάνω από αυτή.

Ώστε $E_ξ=E_{τριγ(OAB)}-E_1=\frac{1}{2}\,(OA)(OB)-\int_0^{π/4}συν2x\,dx=$

$$=\frac{1}{2}\,(OA)(OB)-\frac{1}{2}\Big[ημ2x\Big]_0^{π/4}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{π}{8}+\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\left(\frac{π}{8}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\,(1-0)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{π}{8}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$ μονάδες εμβαδού.

1989

γενικές εξετάσεις

4η Δέσμη

ζήτημα πρώτο

I) Αν για τον τετραγωνικό νxν πίνακα A υπάρχει αντίστροφος να αποδειχθεί ότι είναι μοναδικός.

II) Εστω ο πίνακας $A(x)=\begin{bmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ με $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδειχθεί ότι:

1) $A(x_1)\cdot A(x_2)=A)x_1+x_2)$ με $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ και

2) $A(x)A(-x)=I_3$ (I_3 ο μοναδιαίος 3x3).

απάντηση

I) Θεωρία

II) 1) $$A(x_1)A(x_2)=\begin{bmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ 0 & 1 & 2x_1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & x_2 & x_2^2\\ 0 & 1 & 2x_2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & x_1+x_2 & (x_1+x_2)^2\\ 0 & 1 & 2(x_1+x_2)\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=A\ (x_1+x_2)\quad \forall\, x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$$

2) Από το προηγούμενο ερώτημα για $x_1=x$ και $x_2=-x$ έχουμε:

$$A(x)\ A(-x)=A\ (x+(-x))=A(0)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I_3.$$

ζήτημα δεύτερο

Δίδεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2+\frac{2a}{x}+6$ (a, $6\in\mathbb{R}$) η οποία μηδενίζεται στο $x_1=1$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_o=2$.

α) Να βρεθούν τα a,6

β) Να βρεθεί το είδος του ακρότατου και η τιμή του.

απάντηση

α) Η συνάρτηση f, με $f(x)=x^2+\frac{2a}{x}+6$ ορίζεται στο $A=\mathbb{R}^*$ και παραγωγίζεται σ' αυτό ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x)=2x-\frac{2a}{x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

Επίσης $2\in\mathbb{R}^*$ και η f, στο $x=2$, έχει ακρότατο.

Άρα $f'(2)=0 \Rightarrow 2\cdot 2-\frac{2a}{2^2}=0 \Rightarrow 2a=16 \Rightarrow a=8$.

Έχουμε ακόμα από υπόθεση: $f(1)=0 \Rightarrow 1+\frac{2a}{1}+6=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6=-1-2a=-17$.

β) $f'(x)=2x-\frac{2a}{x^2}=2x-\frac{16}{x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

$f''(x)=2+\frac{32}{x^3}$ $\forall x\in\mathbb{R}^* \Rightarrow f''(2)=6>0$ Άρα η f, στο $x=2$, έχει τοπικό ελάχιστο και η τιμή του είναι $f(2)=$

$=4+\frac{16}{2}-17=-5$

ζήτημα τρίτο

Α. Να αποδείξετε ότι: Αν οι συναρτήσεις f,g με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα Δ είναι παραγωγίσιμες στο $x_o\in\Delta$, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o\in\Delta$ και $(f+g)'(x_o)=f'(x_o)+g'(x_o)$

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3a}{x^3} + 1, & 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{1-\sqrt{x-1}}{x^2-4}, & x > 2 \end{cases}$

Να προσδιοριστεί το $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x_o = 2$.

απάντηση

Α. Θεωρία

Β. Πεδίο ορισμού $A = (0,2] \cup (2, +\infty)$

$2 \in A$

Το 2 σημείο συσσώρευσης του Α

$$f(2) = \frac{3a}{8} + 1 = \frac{3a+8}{8}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) \overset{;}{=}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1-\sqrt{x-1}}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(2-x)}{(x-2)(x+2)(1+\sqrt{x-1})}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{-1}{(x+2)(1+\sqrt{x-1})} = -\frac{1}{8}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(\frac{3a}{x^3} + 1\right) = \frac{3a+8}{8}$$

Θέλουμε να είναι η f, στο $x=2$, συνεχής θα πρέπει:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \Rightarrow \frac{3a+8}{8} = -\frac{1}{8} = \frac{3a+8}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a = -9 \Rightarrow a = -3$$

ζήτημα τέταρτο

Να αποδειχθεί ότι:

α) η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

β) για $\kappa \geq 1$: $\sqrt{\kappa} \leq \int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{x}\, dx$ και $\int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{x}\, dx \leq \sqrt{\kappa}$

1989

γενικές εξετάσεις

4η Δέσμη

ζητημα πρωτο

I) Αν για τον τετραγωνικό νxν πίνακα Α υπάρχει αντίστροφος να αποδειχθεί ότι είναι μοναδικός.

II) Εστω ο πίνακας $A(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ με $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδειχθεί ότι:
1) $A(x_1) \cdot A(x_2) = A)x_1 + x_2)$ με$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ και
2) $A(x)A(-x) = I_3$ (I_3 ο μοναδιαίος 3x3).

απάντηση

I) Θεωρία

II) 1) $A(x_1)A(x_2) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & 2x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ 0 & 1 & 2x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1 & x_1 + x_2 & (x_1 + x_2)^2 \\ 0 & 1 & 2(x_1 + x_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A\ (x_1 + x_2)\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

2) Από το προηγούμενο ερώτημα για $x_1 = x$ και $x_2 = -x$ έχουμε:

$A(x)\ A(-x) = A\ (x + (-x)) = A(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$

ζήτημα δεύτερο

Δίδεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2+\frac{2a}{x}+b$ $(a, b\in\mathbb{R})$ η οποία μηδενίζεται στο $x_1=1$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_o=2$.

α) Να βρεθούν τα α,β

β) Να βρεθεί το είδος του ακρότατου και η τιμή του.

απάντηση

α) Η συνάρτηση f, με $f(x)=x^2+\frac{2a}{x}+b$ ορίζεται στο $A=\mathbb{R}^*$ και παραγωγίζεται σ' αυτό ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x)=2x-\frac{2a}{x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

Επίσης $2\in\mathbb{R}^*$ και η f, στο $x=2$, έχει ακρότατο.

Άρα $f'(2)=0 \Rightarrow 2\cdot 2-\frac{2a}{2^2}=0 \Rightarrow 2a=16 \Rightarrow a=8$.

Έχουμε ακόμα από υπόθεση: $f(1)=0 \Rightarrow 1+\frac{2a}{1}+b=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow b=-1-2a=-17$.

β) $f'(x)=2x-\frac{2a}{x^2}=2x-\frac{16}{x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

$f''(x)=2+\frac{32}{x^3}$ $\forall x\in\mathbb{R}^* \Rightarrow f''(2)=6>0$ Άρα η f, στο $x=2$, έχει τοπικό ελάχιστο και η τιμή του είναι $f(2)=$

$=4+\frac{16}{2}-17=-5$

ζήτημα τρίτο

Α. Να αποδείξετε ότι: Αν οι συναρτήσεις f,g με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα Δ είναι παραγωγίσιμες στο $x_o\in\Delta$, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o\in\Delta$ και $(f+g)'(x_o)=f'(x_o)+g'(x_o)$

B. Δίνεται η συνάρτηση f με: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3\alpha}{x^3} + 1, & 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{1-\sqrt{x-1}}{x^2-4}, & x > 2 \end{cases}$

Να προσδιοριστεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x_o = 2$.

απάντηση

A. Θεωρία

B. Πεδίο ορισμού $A = (0,2] \cup (2, +\infty)$

$2 \in A$

Το 2 σημείο συσσώρευσης του A

$$f(2) = \frac{3\alpha}{8} + 1 = \frac{3\alpha + 8}{8}$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) \overset{;}{=}$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{1-\sqrt{x-1}}{x^2-4} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(2-x)}{(x-2)(x+2)(1+\sqrt{x-1})}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{-1}{(x+2)(1+\sqrt{x-1})} = -\frac{1}{8}$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(\frac{3\alpha}{x^3} + 1\right) = \frac{3\alpha + 8}{8}$$

Θέλουμε να είναι η f, στο x=2, συνεχής θα πρέπει:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) \Rightarrow \frac{3\alpha+8}{8} = -\frac{1}{8} = \frac{3\alpha+8}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\alpha = -9 \Rightarrow \alpha = -3$$

ζήτημα τέταρτο

Να αποδειχθεί ότι:

α) η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

β) για $\kappa \geq 1$: $\sqrt{\kappa} \leq \int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{x}\, dx$ και $\int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{x}\, dx \leq \sqrt{\kappa}$

απάντηση

α) f, με $f(x)=\sqrt{x}$ $|A=[0,+\infty)$

Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ τότε $\lambda = \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} =$

$$= \frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{x_1-x_2} = \frac{(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})} = \frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}} > 0$$

Άρα f ↑ στο A

β) ● $\forall x \in [\kappa, \kappa+1] \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(\kappa) \leq f(x) \leq f(\kappa+1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{\kappa} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{\kappa+1} \Rightarrow \int_\kappa^{\kappa+1} \sqrt{\kappa}\, dx \leq \int_\kappa^{\kappa+1} \sqrt{x}\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\kappa+1-\kappa)\sqrt{\kappa} \leq \int_\kappa^{\kappa+1} \sqrt{x}\, dx \Rightarrow \sqrt{\kappa} \leq \int_\kappa^{\kappa+1} \sqrt{x}\, dx.$$

● $\forall x \in [\kappa-1, \kappa] \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(\kappa-1) \leq f(x) \leq f(\kappa) \Rightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{\kappa} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{x}\, dx \leq \int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{\kappa}\, dx \Rightarrow \int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{x}\, dx \leq (\kappa-\kappa+1)\sqrt{\kappa} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{x}\, dx \leq \sqrt{\kappa}.$$